

## Raport științific

pentru grantul: PN-III-P4-PCE-2016-0363

Structuri spațio-temporare emergente în sisteme fizice și socio-economice

### Rezumat

În anul 2017 cercetările în cadrul acestui proiect s-au realizat conform planului de realizare a proiectului. S-a lucrat mai ales în tematica sincronizării spontane într-un lanț de oscilatori Kuramoto local cuplați. În aceasta tematică, s-a realizat un draft al unui articol care va fi trimis spre publicare anul viitor:

- **K. Dénes**, B. Sándor and **Z. Néda**: *Predicting the final collective mode for Kuramoto oscillators in a ring-like topology*, preprint, 2017

Rezultatele obținute s-au prezentat la o conferință internațională:

- **K. Dénes**, B. Sándor and **Z. Néda**, *Kuramoto oscillators in a ring-like topology* **SigmaPhi 2017** (*Statistical Physics Conference*), Corfu 10-14 July, 2017, Greece

S-a finalizat o lucrare în care s-au studiat structuri spațiale de tip Voronoi obținute într-un model de creștere stohastic unidimensional de tip Kolmogorov-Johnson-Mehl-Avrami (KJMA). Studiul a fost publicat într-o revista ISI din quartila Q1:

- **Z. Néda**, **F. Járαι-Szabó** and **Sz. Boda**, *Cell-size distribution and scaling in a one-dimensional Kolmogorov-Johnson-Mehl-Avrami lattice model with continuous nucleation*, **Physical Review E**, vol. 96, 042145 (2017)

S-a realizat o prezentare de conferință dintr-un studiu anterior efectuat de grupul nostru pentru un model stohastic simplu pe rețele aleatoare:

- **Z. Néda**, L. Davidova, S. Újvári and G. Istrate, *Ruin game on random graphs*, **SigmaPhi 2017** (*Statistical Physics Conference*), Corfu 10-14 July, 2017, Greece

S-a lucrat la un articol teoretic în care se studiază modele bazate pe ecuații master de tip creștere cu resetare, model care este foarte util pentru a genera diferite distribuții caracteristice întâlnite în sisteme complexe. În prezenta lucrare s-a studiat convergența către starea de echilibru din punctul de vedere a distanței entropice. Lucrarea a fost trimisă spre publicare în revista ISI: **Universe** și a fost pus ca preprint pe situl: arxiv.org

- T.S. Biro, A. Telcs and **Z. Néda**, *Entropic Distance for Nonlinear Master Equation*, arXiv: 1711.02364v1[cond-mat.stat-mech] (2017)

S-a reînnoit tehnica de calcul a grupului din bugetul proiectului.

### **In extenso**

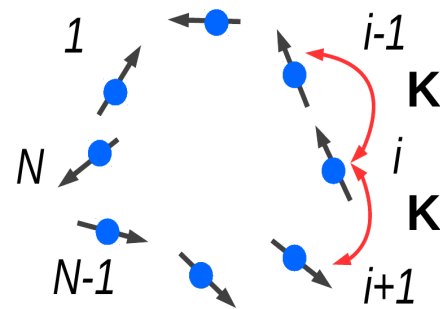
Structuri spațio-temporale emergente în sisteme de oscilatori cuplați este problemă veche în domeniul sistemelor dinamice și în fizica statistică. Aceste structuri pot fi considerate ca diferite tipuri de comportare colectivă și apar în urma unor procese de autoorganizare, adică fără nicio formă de control extern. Condiția de bază care stă la apariția acestor structuri este interacția între oscilatori, astfel fiind un exemplu bun pentru a ilustra cum fenomene microscopice pot determina proprietăți macroscopice al unui sistem. În unele condiții comportările colective spontane definesc starea dinamicii

pe termen lung, adică ordinea este favorizată față de dezordine. Fiind starea stabilă a sistemului, înseamnă că comportarea colectivă este invariantă față de perturbațiile externe, rezultând că sistemul aflat în ordine se va re-autoorganiza dacă perturbăm starea lui modificând fazele oscilatorilor. Independența față de condiții externe și rezistența la perturbațiile sunt aspecte care marchează importanța studiilor referitoare la procese de autoorganizare. Cel mai cunoscut model teoretic în domeniu este modelul Kuramoto[1]. Acest model descrie dinamica unui sistem de oscilator cuplați prin fazele lor prin intermediul unui sistem de ecuații diferențiale neliniare cuplate. Interacția dintre oscilatori este una de formă sinusoidală, asigurând ca "forța de interacție" să favorizeze apropierea fazelor și să dispară când diferența de fază dintre oscilatori este zero.

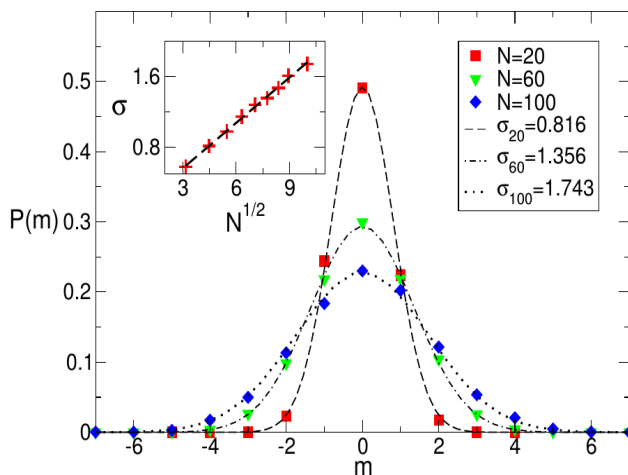
### Modelul teoretic

Modelul Kuramoto original este un model mai simplu unde cuplajul este prezent între fiecare pereche de oscilatori, iar oscilatori nu sunt identice, ele având frecvențe de oscilații proprii, diferite.

În studiul nostru considerăm oscilatori identice aranjate într-un inel unde fiecare oscilator este cuplat la vecinile de ordinul întâi (Fig. 1), astfel realizând o interacție locală. Topologia acesta permite apariția diferitelor stări staționare alături de sincronizarea clasică. Pe de altă parte, având numai oscilatori identici, ordinea va apare în sistem la orice intensitate de cuplaj mai mare decât zero. Astfel tranziția de fază de tip ordine-dezordine din modelul Kuramoto original nu apare în aceste sisteme, și ne concentrăm mai ales pe dinamica și pe stările staționare a sistemului folosind metode analitice și computaționale.



**Figura 1.** Schema sistemului de oscilatori. K indică intensitatea cuplajului.



**Figura 2.** Distribuția de probabilitate a stărilor stabile pentru diferite numere de oscilatori. Prin liniile întrerupte prezentăm regresii de Gaussiene cu diferite abateri standard. În interiorul se vede abaterea standard a distribuțiilor în funcția de rădăcina pătratică a numerelor de oscilatori în sistem.

### Rezultate analitice

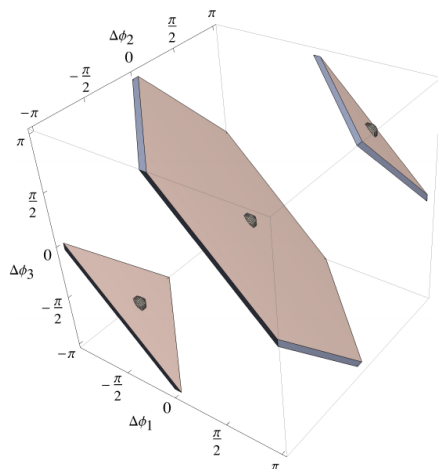
Sistemul considerat de noi este un sistem de tip gradient [2], ceea ce înseamnă că ecuațiile de mișcare pot fi deduse din gradientul unui funcții de potențial, analog cu sistemele Hamiltoniene clasice unde ecuațiile de mișcare pot fi deduse din gradientul energiei potențiale. O proprietate importantă a sistemelor de tip gradient este că singurele stări staționare posibile sunt cele de tip punct fix în timp ce cicluri limită și alte tipuri de atractori nu sunt permise. În punctul fix derivata potențialului este zero corespunzând la minime, maxime sau punctele de tip șa a funcției de potențial generalizate. Pornind de la forma potențialului s-au determinat toate

stările staționare posibile și le-am împărțit în trei clase.

Pentru a descrie în mod consistent poziția relativă a oscilatorilor, am introdus o nouă variabilă numit diferență de fază ( $\Delta\varphi$ ) care poate fi interpretată ca o distanță direcționată și are valori între  $-\pi$  și  $\pi$ . Prima clasă cuprinde stările deja cunoscute în literatura [2, 3, 4]. În acest caz există o diferență de fază constantă și egală între fiecare pereche de oscilatori, caz asemănător cu undele staționare pe perimetrul unui cerc. Dacă numărul oscilatorilor este egală cu  $N$ , numărul acestor stări este egală tot cu  $N$ , iar diferența de fază este sub forma de  $2\pi m/N$ , unde  $m$  este un număr întreg între  $-N/2$  și  $N/2-1$  denumit "winding number" sau index de stare. În a doua clasă avem stările unde suma diferențelor de faze consecutive este  $\pm\pi$ . De aici se poate deduce că numărul acestor stări este infinit și apar numai dacă numărul oscilatorilor este divizibilă cu 4. A treia clasă cuprinde stări mai exotice ele fiind mixuri din cele două tipuri de stări anterioare. La această proprietate neobișnuită se mai adaugă și faptul că acest stări violează simetria rotațională a sistemului în timp ce stările din clasele întâi și a doua păstrează simetria. Numărul acestor stări este tot infinit și am stabilit o formulă între  $N$ ,  $m$ ,  $\Delta\varphi$  și "factorul de mixare" prin care se poate determina proprietatea acestor stări. Menționăm că existența stărilor din ultimele două clase nu a fost încă arătate în literatură. Alături de aceasta s-a studiat analitic și stabilitatea acestor stări. Stările din prima clasă sunt stabile dacă condiția  $-N/4 < m < N/4$  [4] este satisfăcută. Aceasta înseamnă că,  $\Delta\varphi$ , diferența de fază între oscilatori trebuie să fie mai mare decât  $-\pi/2$  și mai mic decât  $\pi/2$ . Stările din celelalte clase au stabilitatea lineară neutră sau sunt instabile.

### Rezultate computaționale

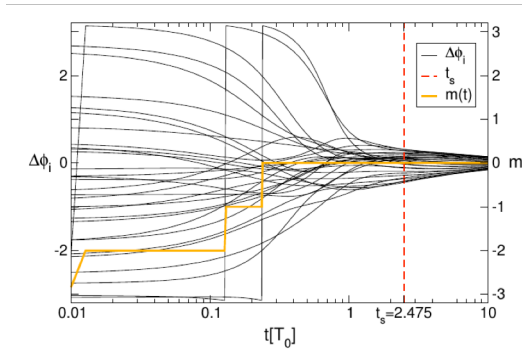
Rezultatele computaționale sunt obținute printr integrarea numerică a ecuațiilor de mișcare a sistemului. Ca primul pas am reprodus un rezultat cunoscut referitor la distribuția de probabilitate ale stărilor stabile [2] (Fig. 2). Distribuția a fost obținută prin integrarea ecuațiilor de mișcare pornind de la o stare inițială întâmplătoare căutând  $m$ -ul stării finale și am repetat acest procedeu pentru o mulțime de realizări pentru a realiza o statistică cât mai bună. Distribuția este una discret însa ea poate fi învelită printr-o distribuție normală (Gauss) centrată la 0. S-a arătat că varianța distribuției este direct proporțional cu rădăcina pătratică a numărului oscilatorilor așa cum a fost așteptat conform rezultatelor din [2].



**Figura 3.** Planurile pentru  $N=3$  definite prin suma diferențelor de faze  $\Delta\varphi$

Pentru a studia dinamica sistemului prima dată s-a investigat spațiul fazelor. Dacă considerăm faza oscilatorilor pentru a descrie starea sistemului spațiul fazelor este spațiul euclid simplu de  $N$  dimensiuni, însa folosind diferența de fază ajungem la o altă concluzie. Considerând definiția diferenței de fază se poate arăta că suma acestor valori este totdeauna un multiplu de  $2\pi$ , iar acel factor multiplicativ este indicele de stare  $m$  pe care am introdus mai sus. Așadar  $m$  poate fi folosit pe tot parcursul dinamicii chiar dacă sistemul nu este ordonat (când diferențe de faze sunt diferite). Suma valorilor  $\Delta\varphi$  determină un hiperplan în spațiul  $N$  dimensional  $\Delta\varphi$  așa că punctul caracteristic se mișcă numai pe suprafața acelor plane (Fig 3.). Având dimensiuni mai mari decât trei, traiectoria punctului

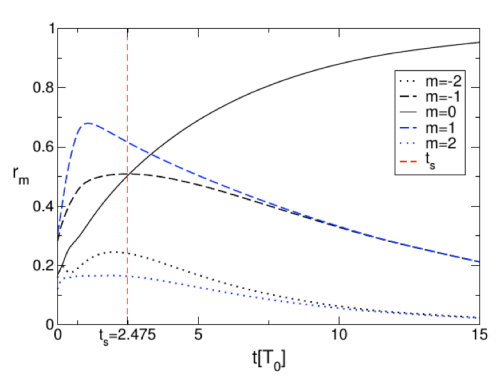
caracteristic nu poate fi vizualizată direct. Figura (Fig.4) arată evoluția sistemului în timp, fiecare curbă reprezentând o diferență de fază. De aici se poate vedea că



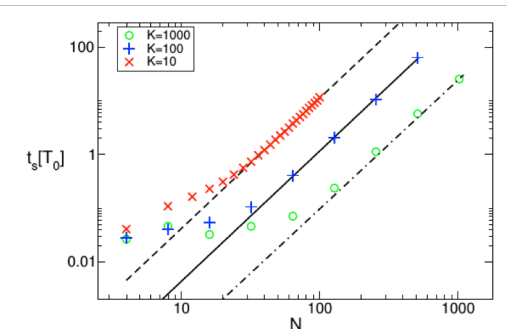
**Figura 4.** Evoluția sistemului în spațiul diferențelor de fază. Cu linia roșie este indicat momentul de selecție

determinarea stării finale de la o stare inițială întâmplătoare pare a fi practic imposibilă, iar comportarea sistemului devine predictibil numai în apropierea stării ordonate. În plus, prin argumente geometrice se poate demonstra că mărimea domeniului în care sistemul este predictibil tinde la zero când  $N$  este mare. Astfel avem nevoie de o metodă prin care putem face predicții mai bune decât folosind numai distribuția de mai sus. S-a propus o metodă pe baza parametrului de ordine Kuramoto generalizată.

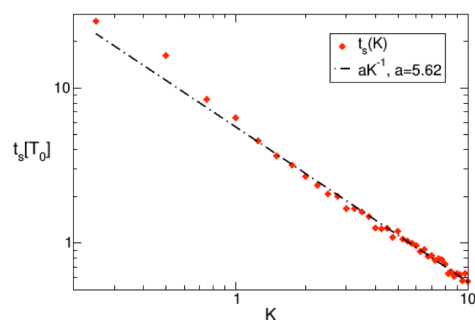
Kuramoto și Nishikava în modelul lor original au introdus parametrul de ordine complexă [1] prin care se poate măsura gradul ordinii în sistem. Valoarea absolută al acestui parametru variază între 0 și 1. La valoarea 0 sistemul este dezordonat total, iar 1 înseamnă că sistemul e ordonat. Menționăm că în contextul original ordinea se referă numai la sincronizarea clasică a sistemului, iar stările cu  $m$  diferite de 0 nu poate fi direct detectate cu acest parametru. Noi am generalizat ideea originală obținând astfel un parametru potrivit pentru detectarea oricărei stări staționare. Dinamica în spațiul parametrilor de ordine este reprezentată în Figura 5. Metoda noastră este următorul: în prima parte a dinamicii evoluția parametrilor de ordine nu este monotonă, unii cresc iar altele scad, dar după un anumit timp numai un parametru va crește în timp ce celelalte tind la zero. Simulările computaționale confirmă că după acest moment comportamentul sistemului nu se modifică și starea căruia aparține parametrul de ordine crescător va fi realizat după un proces de relaxare exponențial. Intervalul de timp începând de la  $t=0$  până la momentul în care starea finală a sistemului se poate prezice s-a denumit *țimp de selecție* ( $t_s$ ). În final s-a determinat dependența timpului de selecție în funcție de numărul oscilatorilor ( $N$ ) și de intensitatea de cuplaj ( $K$ ). Timpul de selecție crește cu  $N$  iar în limita sistemelor mari ( $\sim N > 30$ ) creșterea este bine descrisă printr-un lege tip putere cu exponent  $\beta \approx 2.4$  (Fig. 6). În funcție de intensitatea de interacție ( $K$ ) s-a observat un trend de proporționalitate inversă a timpului de selecție (Fig. 7).



**Figura 5.** Dinamica reprezentat prin evoluția în timp a diferitelor parametre de ordine. Linia roșie discontinuă reprezintă momentul de selectare a stării finale



**Figura 6.** Timpul de selecție în funcție de mărimea sistemului ( $N$ )



**Figura 7.** Timpul de selecție în funcție de intensitate de cuplaj  $K$ .

## Concluzii

S-a studiat sisteme de oscilatori de tip Kuramoto cuplați aranjate în topologii unidimensionale periodice având interacție locală între ele. Pornind de la faptul că sistemul este de tip gradient s-au determinat toate stările staționare posibile și stabilitatea lor folosind o abordare nouă față de lucrările precedente. Am confirmat distribuția probabilistică gaussiană a stărilor stabile prin simulări computaționale. Având în vedere că dinamica sistemului pornind la o stare întâmplătoare este practic impredictibil, s-a prezentat o metodă simplă prin care după un anumit timp de evoluție starea finală a sistemului poate fi prezisă. În acest metod s-a utilizat parametrul de ordine Kuramoto generalizat de către noi. În final s-a stabilit influența parametrilor  $N$  și  $K$  asupra timpului de selecție. Rezultatele obținute au fost sumarizate în cadrul unui preprint (**K. Denes**, B. Sandor and **Z. Neda**: *Predicting the final collective mode for Kuramoto oscillators in a ring-like topology*, preprint, 2017), care urmează să fie trimis spre publicare anul viitor.

## **Bibliografia**

- [1] Yoshiki Kuramoto. *Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators*. In Huzihiro Araki, editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, volume 39 of *Lecture Notes in Physics*, pages 420–422. Springer Berlin Heidelberg, 1975.
- [2] Daniel A. Wiley, Steven H. Strogatz, and Michelle Girvan. The size of the sync basin. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(1):015103, 2006.
- [3] Ramana Dodla, Abhijit Sen, and George L. Johnston. Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators. *Phys. Rev. E*, 69:056217, May 2004.
- [4] A. Lahiri T. K. Roy. Synchronized oscillations on a Kuramoto ring and their entrainment under periodic driving. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(6):888 – 898, 2012