RAPORTARE ȘTIINȚIFICĂ

pentru grantul UEFISCDI PN-III-P4-ID-PCE-2020-0647, anul 2022

1. Sumar al progresului (livrabile realizate, indicatori de rezultat, diseminarea rezultatelor, justificare diferențe, dacă e cazul);

Cercetările s-au derulat conform obiectivelor și taskurilor specificate în planul de realizare. Obiectivele și activitățile prevăzute în proiect pentru anul 2022, Etapa 2 (modele și metode analitice în studiul statistic a fenomenelor complexe) erau următoarele:

(**O1**) Analiza datelor socio-economice, biologice cu taskurile T1.4 si T1.5, activitățile 2.1 și 2.2.
(**O2**) abordare "bottom-up" care pornește de la ecuații de evoluție microscopică și ajungând la o descriere de termodinamică corespunzător unei statistici de echilibru. Concret taskurile T2.2 și T2.3 care urmărește definirea corectă a entropiei în sistemele socio-economice studiate, și taskul T2.4 care urmărește aceeași obiective în sisteme biologice prin intermediul aceluiași metodologii. Activitățile pentru aceste studii din planul de realizare sunt planificate la punctele 2.3 și 2.4
(**O3**) o abordare de tip "top-down" privind generalizarea metodelor termodinamice pentru sisteme socio-economice. Taskurile T3.3 și T3.4 vizează aplicații pe probleme socio-economice și biologice, prin activitățile: 2.5 și 2.6.

Obiectivele pentru anul 2022 au fost atinse prin studiul a 6 probleme concrete, 5 dintre ele planificate în proiect și care sunt prezentate în detaliu la secțiunea 3 din prezentul raport. Pentru aplicații în sisteme biologice s-au studiat sisteme neuronale prin metodologiile prevăzute în proiect. Pentru studiile de abundență în sisteme biologice s-au realizat doar prelucrări și vizualizări de date. Respectând modificările planului de realizare (act adițional semnat la reducerea bugetului pe anul 2022) acestea au fost reprogramate pentru anul 2023.

Ca livrabile erau prevăzute publicații ISI, și prezentări și participări la conferințe. S-au realizat următoarele diseminări:

Publicații WOS (anul 2022) cu acknowledgement la proiect:

1. T.S. Biró, A. Telcs, M. Józsa and Z. Néda , *f-Gintropy: An Entropic Distance Ranking Based on the Gini Index*, **Entropy**, vol. 24, 407 (2022) (IF: 2.524) https://doi.org/10.3390/e24030407

2. T.S. Biró and Z. Néda, *Thermodynamical aspects of the LGGR approach for Hadron Energy Spectra*, **Symmetry,** vol. 14, 1807 (2022) (IF: 2.94) https://doi.org/10.3390/sym14091807

3. A. Gergely and Z. Néda, Computational Fluid Dynamics Approach for Oscillating and Interacting Convective Flows, **Fluids,** vol. 7, 339 (2022) (IS: 1.93) https://doi.org/10.3390/fluids7110339

4. A. Gergely, Cs. Paizs, R. Tötös and Z. Néda, *Oscillations and collective behavior in convective flows*, **Physics of Fluids**, vol. 33, 124104 (2021) (IF: 3.26, acceptat spre publicare si raportat in 2021). https://doi.org/10.1063/5.0073347

In curs de publicare:

1. A. Kuki, F. Járai-Szabó, A. Gergely, I. Gere, Z. Néda, S. Lipcsei, P. Dusan-Ispanovity, Z. Dankházi and I. Groma; *Statistical analogies between earthquakes, micro-quakes and avalanches in the 1D Burridge-Knopoff model*, submited to **Geofizika**, 2022

Prezentări la conferințe internaționale în anul 2022 pe tematica proiectului:

1. Z. Néda**, MECO47** (Middle European Cooperation in Statistical Physics, 12-14 June 2022, Erice, Italy) *A unified approach to wealth and income inequalities in modern societies*. https://meco47.sciencesconf.org/resource/page/id/9

2. S. Kelemen, I. Gere, T. Biro and Z. Néda, **MECO 47** (Middle European Cooperation in Statistical Physics, 12-14 June 2022, Erice, Italy) Wealth inequalities in different socio-economic situations, Exhaustive data and a general modelling framework. https://meco47.sciencesconf.org/resource/page/id/10

3. Mate Jozsa, Maria Ercsey-Ravasz, Zsolt I. Lazar, Investigating brain wiring by simple statistical models, **MECO 47**, Erice, Sicily, June 12-16 2022 https://meco47.sciencesconf.org/resource/page/id/10

4. Z. Néda**, BIODYNAMICS**, A transdisciplinary approach -invited talk (Academia Romana si Institutul de Biodinamica, Bucuresti, 19-21 May, 2022) *The growth and reset dynamics in Complex Systems. https://sites.google.com/view/biodynamics2022/home*

5. I. Gere, Sz. Kelemen, T.S. Biro and Z. Néda; **Econophysics Colloqium** 2022 **(**August 24-26, 2022, Thessaloniki, online) *Wealth inequality patterns based on exhaustive sampling. Data mining and modelling.* https://ec2022.auth.gr/

6. Sz. Kelemen, M. Jozsa and Z. Néda; **Econophysics Colloqium** 2022 **(**August 24-26, 2022, Thessaloniki, online) *Estimation of the Gini coefficient from incomplete datasets.* https://ec2022.auth.gr/

Prezentări accesibile pe Web:

Social inequalities in the perspective of a physicist (in Hungarian)
https://www.youtube.com/watch?v=BzoTP8pSyzg
https://www.youtube.com/watch?v=nHLxJxSryy0

Director Proiect
Néda Zoltán

2. Rezumat executiv al activităților realizate în perioada de implementare (max. 1 pag.).

În primii doi ani a proiectului (anul 2021 si 2022) studiile efectuate și progresele realizate au respectat planul de realizare a proiectului.

În cadrul activităților din anul 2021, **Etapa 1** (colectare si prelucrare preliminară de date) s-au realizat toate obiectivele propuse. S-au identificat sistemele complexe specifice studiate în anul 2022 pentru modelarea de tip bottom-up. În acord cu planul de realizare a proiectului, s-a construit bazele de date, care se folosesc pentru studiile teoretice de modelare. Bazele acestea de date se pot consulta pe pagina de web a proiectului: https://atom.ubbcluj.ro/stacos/ : baza de data BCI (pentru studiile de abundențe de populație), baza de data pentru cutremure, baza de data pentru distribuții de avere respectiv baza de date pentru fulgere. Datorită restricțiilor din pandemie s-a realizat o singură participare la o conferință internațională în domeniul econo-fizicii cu o prezentare orală. S-a publicat o lucrare indexat WOS pe tematica legată de probleme socio-economice în **Physica A**, si au fost trimise doua lucrări spre publicare în **Physics of Fluids**, si **Frontiers in Physics**, ambele fiind deja publicate și se pot consulta pe pagina de web a proiectului.

În anul 2022, în cadrul **Etapei 2** (modele și metode analitice în studiul statistic a fenomenelor complexe) s-au realizat obiectivele propuse în planul de realizare, mai puțin unul din obiective (generalizarea mărimilor termodinamice pentru sisteme biologice) taskul acesta fiind parțial mutat pe anul 2023, prin actul adițional semnat ca urmare a diminuării bugetului de către autoritatea contractantă. Obiectivele pentru anul 2022 s-au realizat prin studiul a 6 probleme concrete, detaliate în raport. Aceste studii sunt: (1) o nouă metodologie inspirat de teorii de tip mean-field pentru determinarea coeficientului Gini utilizând date grosiere (coarse-grained); (2) f-Gintropia – generalizarea Gintropiei; (3) generalizarea metodelor termodinamicii la descrierea fenomenului de hadronizare; (4) abordarea statistică a unor limite și scalări a indicelui Hirsch cu numărul total de citări; (5) studiul rețelei neuronale cerebrale printr-un model statistic simplu; (6) comportamentul colectiv în coloane de fluid oscilante. Prin aceste studii concrete s-au urmărit realizarea obiectivelor și a taskurilor concrete, o abordare de tip bottom up și top-down la generalizarea metodelor termodinamice statistice pentru fenomene complexe. S-a generalizat astfel Gintropia care combină elemente din entropia clasică cu indicele de inegalitate Gini, introducând mărimea de f-Gintropie și argumentând aplicabilitatea ei la probleme concrete. S-a arătat cum se pot generaliza concepte din termodinamica la probleme de hadronizări în urma ciocnirilor relativiste, fenomene profund nestaționare. Folosind metodele clasice ale fizicii statistice s-a elaborat o nouă metodă pentru determinarea indicelui Gini în fenomene socio-economice din date grosiere, respectiv modelarea rețelei neuronale celebrale. S-au publicat 3 noi articole WOS în revistele: **Entropy**, **Symmetry** și **Fluids.** A fost trimis o lucrare spre publicare în revista WOS **Geofizika.** În cadrul acestei etape s-au realizat diseminări a rezultatelor obținute prin 6 participări la conferințe internaționale cu prelegeri orale și postere. Toate realizările sunt prezentate pe situl proiectului.

Director Proiect
Néda Zoltán

3. Descrierea științifică cu punerea în evidență a rezultatelor etapei anuale și gradul de realizare a obiectivelor;

S-au studiat următoarele probleme concrete:

I. O nouă metodologie inspirat de teorii de tip mean-field pentru determinarea coeficientului Gini utilizând date grosiere (coarse-grained) (O1 și O2).
II. f-Gintropia – generalizarea Gintropiei (O2 și O3).
III. Utilizarea metodelor termodinamicii la descrierea fenomenului de hadronizare (O2 și O3) .
IV. Abordarea statistică a unor limite și scalări a indicelui Hirsch cu numărul total de citări (O1).
V. Studiul rețelei neuronale cerebrale printr-un model statistic simplu (O2).
VI. Comportamentul colectiv în coloane de fluid oscilante. Simulări computaționale. (nu era obiectiv prevăzut)

În aceste studii s-au publicat 4 articole ISI, dintre care 3 cu acknowledgement la proiect. A fost trimis spre publicare o lucrare pe tema statisticii cutremurelor. S-au realizat 6 prezentări la conferințe internaționale și seminarii de cercetare invitate pe tema proictului. Aceste diseminări și livrabile sunt enumerate la punctul II.

I. <u>O nouă metodologie inspirat de teorii de tip mean-field pentru determinarea coeficientului Gini utilizând date grosiere (coarse-grained).</u>

Cuantificarea inegalității în context socio-economic, folosind venitul sau averea, este o problemă care se află constant în focusul cercetărilor socio-economice[1-7]. Econofizica este și ea interesată de această problematică, și investighează aceste probleme folosind modelele și metodele clasice ale fizicii statistice. Bazându-se pe principiul lui Pareto se poate considera că distribuția venitului/averii în interiorul unei societăți se extinde pe mai multe ordini de mărimi [3]. Coeficientul Gini *G*, definit ca jumătatea mediei a valorilor absolute ale diferențelor relative dintre venituri sau avere, este utilizat în mod predominant pentru a caracteriza dispersia valorilor:

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|}{2n^2\bar{x}}, \qquad 1.(1)$$

unde x_i este venitul sau averea persoanei *i* și *n* este numărul total de persoane luate în considerare în statistică. În cazurile când distribuția venitului și cea a averii sunt caracterizate printr-o funcție continuă de densitate de probabilitate *p(x)*, coeficientul Gini poate fi exprimat ca:

$$G = \frac{1}{2}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y)|x-y|dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx}. \qquad 1.(2)$$

În general, distribuția venitului sau a averii este caracterizată pe diverse intervaluri, oferind o distribuție exponențială pentru clasa de mijloc și o scădere de tip funcție de putere (distribuție de tip Pareto) pentru intervalul de venituri/averi mari [4-7].

În cadrul statisticilor oficiale, în cele mai multe cazuri datele de venit/avere la nivel individual în interiorul unei zone geografice sunt protejate de GDPR și nu sunt accesibile pentru studii științifice. Pentru a oferii o mărime care să compenseze dezavantajele date de lipsa exhaustivă a datelor, se folosește coeficientul Gini ponderat:

$$G_{ponderat} = \frac{1}{2\langle I \rangle} \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} \frac{N_i N_j}{\left(\sum_{i=1}^{S} N_i\right)^2} \left|I_i - I_j\right|, \qquad 1.(3)$$

unde I_i este venitul/averea medie $I_i = \left(\frac{W_i}{N_i}\right)$, W_i fiind venitul/averea totală, iar N_i numărul de indivizi din regiunea S_i. S reprezintă numărul de subregiuni luate în considerare în statistică.

Prin această metodologie, o parte considerabilă a inegalităților este pierdută prin neglijarea diferențelor provenite de la nivelurile inferioare. În studiul efectuat de grupul nostru am propus o metodologie nouă care să aproximeze și diferențele existente la nivelurile inferioare. Ipoteza noastră de lucru a fost că distribuția veniturilor/averii este una exponențială în interiorul unei subzone geografice (localități):

$$p_i(x) = a_i \cdot e^{-a_i \cdot x}, \qquad 1.(4)$$

unde N_i este populația în subregiunea i , iar a_i este reciproca valorii medii corespunzătoare a venitului din regiunea i $\left(a_i = \frac{1}{I_i} = \frac{N_i}{W_i}\right)$. Distribuția aceasta este normalizat. Datele privind averea la nivel individual din comuna Sâncraiu (Județul Cluj, România) [7] susțin ipoteza noastră pentru distribuția averii/venitului în interiorul subregiunilor mici, acestea fiind bine aproximate cu o distribuție de tip exponențial (Figura 1.1). Averea locuitorilor pentru 2021 a fost estimat pe baza impozitului plătit după bunuri. Distribuția averii în comuna studiată sugerează că metodologia noastră este aplicabilă pentru cuantificarea inegalităților de averi în societățile capitaliste pe baza datelor privind veniturile medie la nivel de localități.

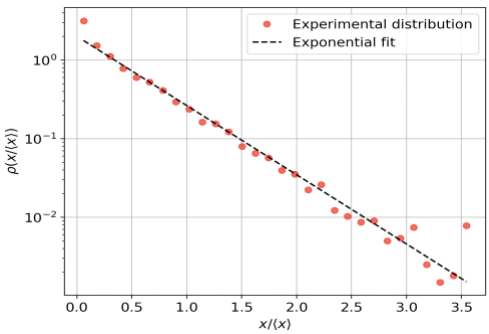

Figura 1.1: Distribuția averii (probabilitatea de densitate), estimat pe baza impozitului plătit de locuitori în comuna Sâncraiu, România, în anul 2021. Trendul linear pe axele log-normale sugerează o distribuție exponențială.

Pentru întreaga regiune geografică distribuția totală, $p(x)$ va devenii:

$$p(x) = \frac{\sum_{i=1}^{S} N_i p_i(x)}{\sum_{i=1}^{S} N_i}, \qquad 1.(5)$$

unde S este numărul de subregiuni incluse în aria geografică studiată. Folosind această formă pentru determinarea coeficientului Gini total obținem:

$$G_{total} = \frac{\sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} N_i N_j \frac{I_i^2}{I_i + I_j}}{S^2 \langle N \rangle^2 \langle I \rangle}, \qquad 1.(6)$$

unde $\langle I \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{S} I_i N_i}{\sum_{i=1}^{S} N_i}$ și $\langle N \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{S} N_i}{S}$.

S-a introdus și coeficienții Gini interni respectivi cei transversali (cross) pentru a cuantifica separat diferențele în interiorul subdomeniilor, respectiv cele existente între acestea.

Metoda noastră a fost testată folosind date exhaustive de venituri pentru județul Cluj și Ungaria. In Figura 1.2 s-a reprezentat grafic distribuția reală a veniturilor (construită pe baza datelor exhaustive ale veniturilor individuale) în județ în comparație cu distribuția modelată în ecuația (7). S-a obținut o suprapunere aproape perfectă a datelor reale cu cele ale modelului propus (Figura 1.2), confirmând aplicabilitatea metodei propuse.

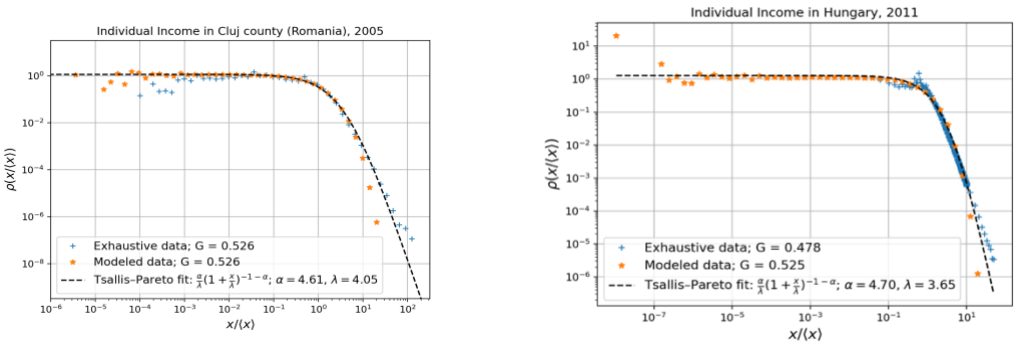

Figura 1.2: Distribuția exhaustivă a veniturilor tuturor persoanelor din județul Cluj (stânga) și datele de venituri percentile din Ungaria (dreapta), versus distribuția modelată a veniturilor folosind metoda propusă. Se observă suprapunere aproape perfectă între cele două distribuții, împreună cu o fitare Tsallis-Pareto

S-a analizat variația în timp a coeficienților Gini total, ponderat, interni și transversali și s-au obținut rezultate interesante, prezentate în Figura 1.3 și 1.4.

- Gini total este întotdeauna mai mare decât coeficientul Gini ponderat
- Inegalitatea în segmentul rural al societății românești este mai mare decât inegalitatea globală în timp ce în cazul Ungariei se observă efectul contrar.
- Toate valorile converg la aproximativ 0,5, caracteristic distribuției exponențiale.

Aceste studii urmează să fie publicate și diseminate în 2023 după ce se confirmă și pe alte date socio-economice exhaustive aplicabilitatea metodologiei propuse.

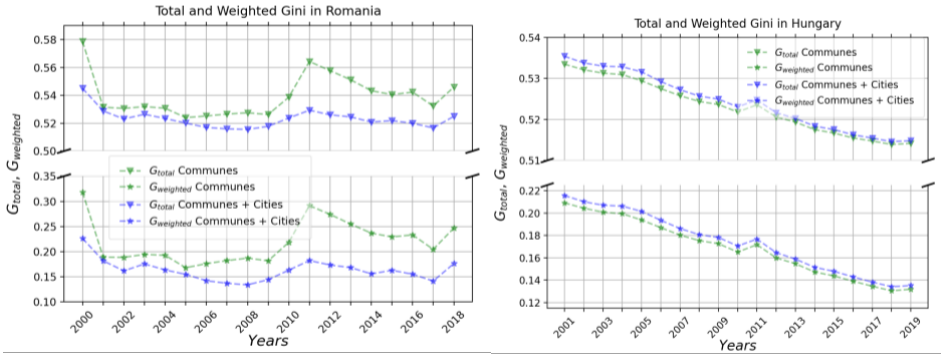

Figura 1.3: Variația în timp a coeficienților Gini total estimat cu metoda noastră (graficele din partea superioară) și ponderat în cazul comunelor (curbe verzi) și al tuturor localităților (curbe albastre) din România (stânga) și din Ungaria (dreapta).

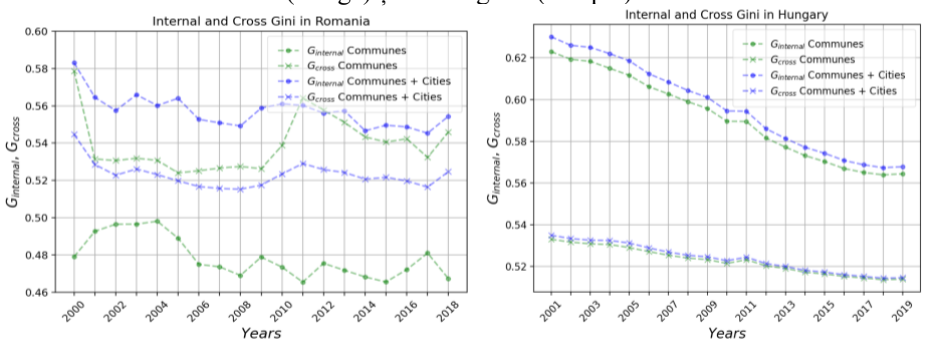

Figura 1.4: Variația temporală a coeficienților Gini intern și transversal în cazul comunelor (curbe verzi) și al tuturor localităților (curbe albastre) din România (stânga) și din Ungaria (dreapta).

Aceste rezultate sugerează faptul că valoarea Gini este subestimată dacă se folosesc numai date medii pe localități. Metoda noastră oferă o posibilitate mai bună pentru estimarea coeficientului Gini real. Compararea/separarea diferențelor interne și celor transversale la diferite niveluri administrative dintr-o țară poate duce la studii socio-economice interesante, și la interpretarea mea clară a inegalităților existente.

Bibliografie

[1] Levy M., Levy H. Investment talent and the Pareto wealth distribution: Theoretical and experimental analysis. The Review of Economics and Statistics, Vol. 85, 709–725, (2003)

[2] Jones C.I. Pareto and Piketty: The Macroeconomics of Top Income and Wealth Inequality. Journal of Economic Perspectives, Vol. 29, 29–46, (2015).

[3] Pareto V. Cours d'Économie Politique. (Macmillan, Paris, Vol. 2, 1897)

[4] Gere I., Kelemen S., Tóth G., Biró T. S., Néda Z. Wealth distribution in modern societies: Collected data and a master equation approach Physica A, Vol. 581, 126194, (2021)

[5] Néda Z., Gere I., Biró T. S., Tóth G., Derzsy N. Scaling in income inequalities and its dynamical origin. Physica A, Vol. 549, 124491, (2020)

[6] Derzsy N., Néda Z., Santos M.A. Income distribution patterns from a complete social security database. Physica A, Vol. 391, 5611–5619. (2012)

[7] Gere I, Kelemen S, Biró TS and Néda Z (2022) Wealth Distribution in Villages. Transition From Socialism to Capitalism in View of Exhaustive Wealth Data and a Master Equation Approach. Front. Phys. 10:827143

II. f-Gintropia – generalizarea Gintropiei

În cadrul studiilor efectuate în acest an s-a făcut o generalizare a unei măsuri de inegalități socio-economice recent introdus de grupul nostru (Gintropia), pe care o numim în continuare ca f-Gintropie [1, 2]. Gintropia are avantajul că face legătura dintre mărimea pur termodinamică, care este entropia și indicele de inegalitate folosit în studiile socio-economice: indicele Gini. O definiție a coeficientului Gini este diferența absolută medie relativă a cantităților relevante (adică venituri, averii) [3]:

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|}{2n^2\,\langle x\rangle}, \qquad 2.(1)$$

unde x_i este venitul sau averea persoanei i și n este numărul total de persoane luate în considerare în statistici. Alternativ, o definiție matematic echivalent pentru indicele Gini este proporția dintre aria de sub curba Lorenz și linia de egalitate. Curba Lorenz este o reprezentare grafică a distribuției venitului sau averii. Această curbă exprimă relația dintre $\bar{C}(x) = \int_x^\infty p(y)dy$, adică fracția populației care este mai bogată decât x, și $\bar{F}(x) = \frac{1}{\langle x\rangle}\int_x^\infty y\,p(y)dy$, venitul/averea acumulată de clasa mai bogată decât x, împărțit la venitul/averii mediu (Figura 2.1, stânga).

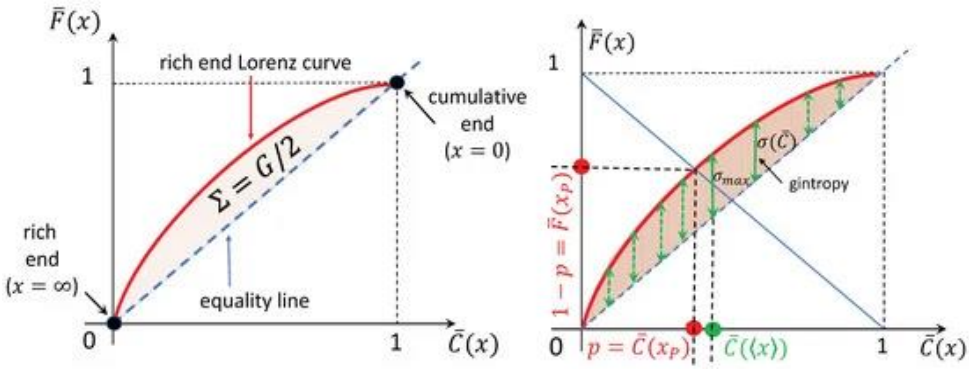

Figura 2.1: (stânga) Curba Lorenz și legătura cu coeficientul Gini. (dreapta) Ilustrație al Gintropiei [1].

Gintropia (Figura 2.1 dreapta) , σ, este definit în [1] ca o densitate al indicelui Gini pe curba Lorenz sau mai simplu spus ca diferența dintre curba Lorenz și linia de egalitate:

$$\sigma(x) = \bar{F}(x) - \bar{C}(x) = \int_x^\infty \left(\frac{y}{\langle x\rangle} - 1\right) p(y)dy. \qquad 2.(2)$$

Dacă Gintropia este exprimat în funcție de $\bar{C}(x)$, obținem formule interesante, asemănătoare entropiei, permițând astfel generalizarea acestui concept termodinamic la studiile socio-economice (Tabelul 2.1).

Distribuții caracteristice	$p(x)$	$\sigma(\bar{C})$
natural	$\frac{1}{\langle x \rangle} e^{-\frac{x}{\langle x \rangle}}$	$-\bar{C} \ln \bar{C}$ Formula entropiei Shanon
Tsallis-Pareto	$\frac{A}{1-q}(1 + A\,x)^{\frac{-1}{1-q}}$	$\frac{1}{1-q}(\bar{C}^q - \bar{C})$ Formula q-entropiei lui Tsallis
uniform	$\delta(x-a)$	0 Entropia distribuției uniforme

Tabelul 2.1: PDF-uri și formule de gintropy pentru distribuțiile idealiste ale venitului/averii. Formulele seamănă cu entropiile Shannon și Tsallis.

Pentru a folosi Gintropia ca o densitate de probabilitate (PDF), trebuie normalizat:

$$\hat{\sigma}(x) = \frac{\sigma(x)}{\langle \sigma \rangle} = \frac{2\sigma}{G}. \qquad 2.(3)$$

Am aplicat această distribuție la datele privind veniturile din Australia, județul Cluj (România), Ungaria, Japonia și SUA, pentru a evidenția diferențele subtili în aceste distribuții. Gintropia ca PDF are avantajul că este maxim la valoarea medie a distribuției, amplificând astfel diferențele pentru PDF în regiunea mediei. Rezultatele obținute prin folosirea Gintropiei arată că distribuția veniturilor în Japonia diferă semnificativ de la celelalte țări studiate (Figura 2.2). Curba Gintropiei pentru Australia este cea mai apropiată de distribuția naturală. Ungaria și județul Cluj sunt, de asemenea, destul de asemănătoare. Apropierea de distribuția naturală confirmă ceea ce ne așteptam deja: venitul/averea tind să aibă o distribuție exponențială în clasa de mijloc a societății (Figura 2.2), acolo unde utilizarea Gintropiei este cea mai indicată. Gintropia nu este adecvat însă pentru a studia regimul Pareto, adică extermurile de la valori mari.

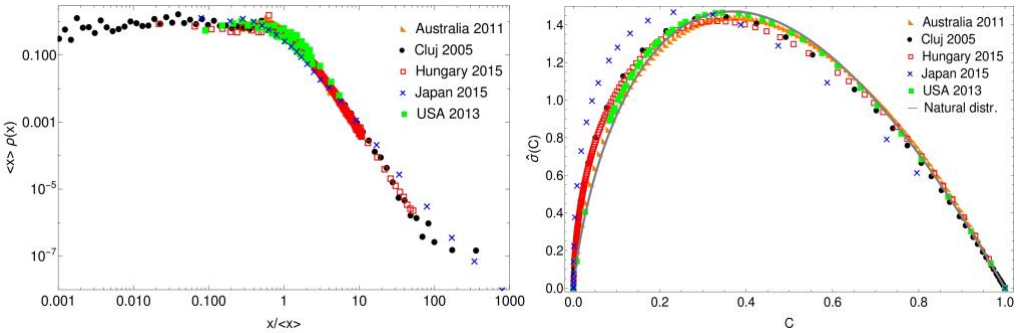

Figura 2.2: (stânga) Funcția de densitate a probabilității pentru distribuțiile venitului normalizat pentru țările studiate. Normalizarea se face în raport cu valoarea medie. (dreapta) Gintropia normalizată a datelor de distribuție a venitului în comparație cu cea pentru distribuția naturală. Se observă diferența pronunțată dintre Japonia și celelalte țări studiate.

De asemenea, s-a observat că Gintropia datelor poate fi bine descrisă cu Gintropia normalizată corespunzătoare distribuției Tsallis-Pareto, tipică pentru capitalism. În Figura 2.3, stânga se arată fitarea datelor cu Gintropia de tip Tsallis-Pareto cu valoarea q optimă.

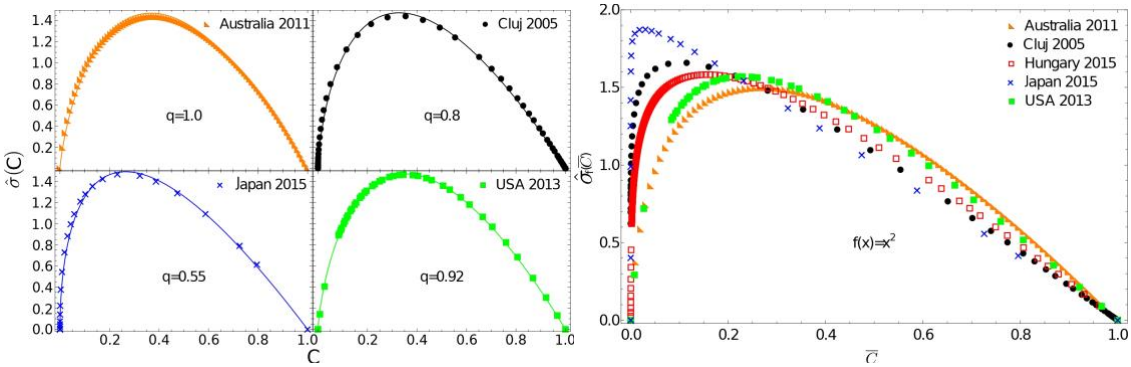

Figura 2.3: (stânga) Gintropy pentru țări, potrivită cu cea derivată din distribuția Tsallis-Pareto (capitalism) la o valoare q optimă. (dreapta) f-Gintropy cu $f(x) = x^2$ calculat pentru datele de venit. Se observă aici o separare mai evidentă a distribuțiilor caracteristice.

f-Gintropia, σ_f, este o extindere a gintropiei permițând utilizarea unei mărimi derivate din x. Astfel folosind o funcție ***f(x)***,

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{\langle x \rangle}\int_x^\infty y\, p(y)dy \quad \rightarrow \quad \bar{F}_f(x) = \frac{1}{\langle x \rangle}\int_x^\infty f(y)p(y)dy. \qquad 2.(4)$$

definiția al f-Gintropiei va fi:

$$\sigma_f(x) = \bar{F}_f(x) - \bar{C}(x) = \int_x^\infty \left(\frac{f(y)}{\langle f(x) \rangle} - 1\right)p(y)dy. \qquad 2.(5)$$

S-au demonstrat proprietăți interesante și foarte utile pt. f-Gintropie, permițând astfel să fie aplicat ca o generalizare și mai largă a entropiei.

- este întotdeauna o mărime pozitivă ($\sigma f \geq 0$).
- este zero numai pentru $x = 0$ and $x = \infty$, sau corespunzător la $C = 0$ și $C = 1$.
- este maxim la $x = x_m$, pentru care $f(x_m) = \langle f \rangle$.
- are un singur maximum în funcție de x sau C / F_f.
- f-Gintropia σf, ca și entropia este o funcție concavă în funcție de C și F_f.

De asemenea, s-a aplicat această măsură datelor, rezultând o separare mai evidentă a țărilor (Figura 2.3, dreapta). Pentru a identifica diferențele cantitative dintre PDF-uri, bine-cunoscuta divergență Kullback-Leiber a fost, de asemenea, utilizat folosind funcția $f(x)=x^2$. În Tabelul 2 se arată valoarea divergenței KL, folosind această funcție.

$\times 10^{-3}$	Australia	USA	Cluj	Hungary	Japan
Australia	0	1.8	36	19	62
USA	1.7	0	27	13	50
Cluj	48	39	0	3.8	4
Hungary	22	16	3.5	0	14
Japan	86	74	4.3	17	0

Tabelul 2.2: Divegențele K-L, folsind funcția $f(x)=x^2$ pentru f-Gintropie.

În cadrul lucrării [2] s-a argumentat utilitatea utilizarea f-Gintropiei în descrierea unor fenomene socio-economice.

Bibliografie

[1] Biró, T.S.; Néda, Z. Gintropy: Gini Index Based Generalization of Entropy. Entropy 2020, 22, 879.
[2] Biró, T.S.; Telcs, A.; Józsa, M.; Néda, Z. f-Gintropy: An Entropic Distance Ranking Based on the Gini Index. Entropy 2022, 24, 407.
[3] Sen, A. (1973). On Economic Inequality. Clarendon Press.

III. Utilizarea metodelor termodinamicii la descrierea fenomenului de hadronizare

Modelul LGGR (creștere locală cu resetare globală) întrodus de noi recent [1], s-a folosit până acum cu succes pentru descrierea a multor fenomene socio-economice. În studiile noastre, finalizate în acest an s-a arătat ca modelul poate fi folosit și pentru descrierea spectrelor de energie observate în procesele de hadronizare rezultate din ciocniri ultrarelativiste. Deși aceste fenomene sunt fenomene profund de neechilibru, distribuțiile caracteristice pot semăna cu cele de tip echilibru (exponențial și q-exponențial) și se pot definii în analogii cantități termodinamice precum temperatură, și călduri specifice [2].

Modelul de tip LGGR pentru un proces cu stări discrete, este bazat pe o ecuație de evoluție în care există un proces local de creștere, caracterizat cu o rată dependentă de starea n, μ_n respectiv un proces de resetare la o stare de bază, caracterizat cu o rată γ_n. Ecuația de evoluție a densității de probabilitate $\rho(x,t)$ [1], este:

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = \mu_{n-1}P_{n-1}(t) - \mu_n P_n(t) - \gamma_n P_n(t) + \delta_{n,0}\langle\gamma\rangle(t) \qquad 3.\ (1)$$

unde:

$$\langle\gamma(x)\rangle(t) = \sum_j \gamma_j P_j(t) \qquad 3.\ (2)$$

Avantajul acestui ecuații master față de cea cu termeni de difuzie (ecuații de tip Fokker-Planck) este că permită a soluție analitică pentru starea staționară:

$$Q_n = \frac{\mu_0 Q_0}{\mu_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{\mu_j+\gamma_j} \qquad 3.(3)$$

In cadrul ciocnirilor relativiste densitatea de probabilitate ca energia particulelor observate să fie ε se poate aproxima ca (vezi [2]):

$$\rho(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma_1(\epsilon)\Gamma_n(E-\epsilon)}{\Gamma_{n+1}(E)}\,P_n(E) \qquad 3.(4)$$

unde $\Gamma_k(E)$ este hiper-suprafața din spațiul k dimensional unde energia este E, iar $P_n(E)$ este probabilitatea ca să se formeze n particule într-o ciocnire relativistă de energie E. Într-o aproximație microcanonică și folosind aproximația ultrarelativistă s-a demonstrat (vezi [3]) că:

$$\rho(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{E}\left(1-\frac{\varepsilon}{E}\right)^{n-1}P_n(E) \qquad 3.(5)$$

Folosind ipoteza unui proces de tip LGGR, se poate determina probabilitățile $P_n(E)$, și astfel spectrul hadronilor generați. S-au studiat două aproximații: (a) în care se presupune rate constante, μ, pentru procesul de creștere a numărului de hadroni după o ciocnire, și rată constantă de resetare, γ, semnificând un proces de reformare a plasmei quark-gluonice din care s-a pornit hadronizarea, (b) În care se presupune o rată de creștere preferențială (linear dependent de n) , $\mu_n = \sigma\left(\frac{n}{k}+1\right)\langle n\rangle$, și rată de resetare tot preferențiară $\gamma_n = \sigma(n-\langle n\rangle)$, ambele dependente și de numărul medii de particule $\langle n\rangle$.
În cazul (a) modelul LGGR ne conduce la:

$$P_n(E) = Q_n = \frac{1}{1+\frac{\mu}{\gamma}}\left(1+\frac{\gamma}{\mu}\right)^{-n} \qquad 3.(6)$$

cu $\langle n\rangle = \frac{\gamma}{\mu}$. Se poate arăta că spectrul de energie depinde numai de $\langle n\rangle$:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\langle n\rangle+1}{E}\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon\langle n\rangle}{E}\right)^2} \qquad 3.(7)$$

Pentru $\frac{n\varepsilon}{E} \ll 1$ obținem:

$$\rho(\varepsilon) \approx \frac{\langle n\rangle+1}{E}\left(1-2\frac{\langle n\rangle\varepsilon}{E}+3\left(\frac{\langle n\rangle\varepsilon}{E}\right)^2+O\left(\frac{\langle n\rangle\varepsilon}{E}\right)^3\right) \qquad 3.(8)$$

În cazul (b) modelul LGGR prezice în acord cu datele experimentale [3]:

$$P_n(E) = Q_n = \binom{n+k-1}{n}\frac{\left(\frac{\langle n\rangle}{k}\right)^n}{\left(1+\frac{\langle n\rangle}{k}\right)^{k+n}} \qquad 3.(9)$$

Această distribuție staționară pentru numărul de particule ne conduce la spectrul

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\langle n\rangle}{E}\frac{1}{1-\left(1+\frac{\langle n\rangle}{k}\right)^{-k}}\left(1+\frac{\langle n\rangle\varepsilon}{kE}\right)^{-k-1}, \qquad 3.(10)$$

care în limita $\frac{n\varepsilon}{k}E \ll 1$ ne conduce la:

$$\rho(\varepsilon) \approx \frac{\langle n\rangle}{E\left(1-\left(1+\frac{\langle n\rangle}{k}\right)^{-k}\right)}\left(1-\frac{k+1}{k}\frac{\langle n\rangle\varepsilon}{E}+\frac{(k+1)(k+2)}{2k^2}\left(\frac{\langle n\rangle\varepsilon}{E}\right)^2+O\left(\frac{\langle n\rangle\varepsilon}{Ek}\right)^3\right) \qquad 3.(11)$$

Alternativ, se poate considera și o distribuție de tip Poisson, care este la fel ușor de argumentabil [2] printr-un model elementar

$$P_n(E) = Q_n = e^{-\langle n\rangle}\frac{\langle n\rangle^n}{n!}, \qquad 3.(12)$$

și care ne conduce la un spectru de energie caracteristic sistemelor de echilibru de tip Boltzmann-Gibbs:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\langle n\rangle}{E\left(1-e^{-\langle n\rangle}\right)}e^{-\langle n\rangle\frac{\varepsilon}{E}} \qquad 3.(13)$$

In termodinamica statistică în cadrul distribuției canonice când energia este maximată la valoarea E pentru o temperatură T avem:

$$\rho_T(\varepsilon) = \frac{1}{T\left(1-e^{-\frac{E}{T}}\right)}e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \qquad 3.\ (14)$$

În limita $\frac{\varepsilon}{T} \ll 1$, avem aproximația

$$\rho_T(\varepsilon) \approx \frac{1}{T\left(1-e^{-\frac{E}{T}}\right)}\left(1-\frac{\varepsilon}{T}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{T}\right)^2+O\left(\frac{\varepsilon}{T}\right)^3\right), \qquad 3(15)$$

Comparând formulele spectrelor obținute cu diferite aproximații in limita $\frac{n\varepsilon}{E} \ll 1$, 3.(8), 3.(11) și 3.(13) cu formula din termodinamica statistică 3.(15), se poate generaliza conceptul de temperatură și pentru fenomene de neechilibru. Se poate observa că pentru procesul de tip LGGR cu rate lineare de creștere și resetare în limita $k \gg 1$, distribuția este identică cu cel de echilibru la temperatura T până la aproximația de ordinul întâi. Temperatura se poate definii ca $T = E/\langle n\rangle$, în acord cu cea ce se utilizează la ciocniri de particule relativiste.

Bibliografie

[1] T.S. Biró and Z. Néda, *Unidirectional random growth with resetting*, Physica A, vol. 499, 335-361 (2018)

[2] T.S. Biró and Z. Néda,Thermodynamical Aspects of the LGGR Approach for Hadron Energy Spectra, Symmetry, vol. 14, 1807 (2022)

[3] A. Adare et al. *PHENIX Collaboration*. Phys. Rev. C vol. *78*, 044902 (2008)

IV. Abordarea statistică a unor limite și scalări a indicelui Hirsch cu numărul total de citări

Indicele Hirsch (sau pur și simplu indicele „h”) [1], promovat pentru a fi utilizat la evaluarea prestației științifice a cercetătorilor, revistelor și instituțiilor, este definit ca numărul de publicații pentru care a fost colectat cel puțin aceeași număr de citări:

$$h = N(x \geq h) = N_{pub}\bar{C}(h). \qquad 4.(1)$$

Pentru un PDF dat, $\rho(x)$, indicele Hirsch h este soluția ecuației de mai sus, care în majoritatea cazurilor este o ecuație transcendentală. Unele distribuții sunt totuși speciale. Ori de câte ori , $\rho(x)$, reflectă o anumită proprietate de scalare subiacentă, ne așteptăm ca indicele Hirsch să fie, de asemenea, supus unei anumite scalari consecutive. În cadrul studiului nostru s-a studiat cazul special în care funcția de distribuție cumulativă, satisface relația foarte generală de scalare:

$$\overline{C(x)} = e^{-f(ax+b)},$$

unde a, si b sunt singurele parametrii care definesc aceasta funcție de distribuție cumulativă. În cadrul studiului nostru am construit o teorie generală de scalare între indicele Hirsch, h, și numărul total de publicații, N_{pub}, și citările la acele publicații, N_{cit} pentru cazul distribuției Pareto normalizate, $\rho(x) = b(1 + ax)^{-b-1}$, care se încadrează în setul larg de distribuții cu scalarea indicată. Acceptând distribuția de tip Tsallis-Pareto, demonstrat în lucrarea noastră anterioară [2], se obține o legătură universală:

$$\frac{\sqrt{N_{cit}}}{N_{pub}} = \sqrt{\frac{h/N_{pub}}{(b-1)[(h/N_{pub})^{-\frac{1}{b}} - 1]}}. \qquad 4.(2)$$

Știind că Gintropia are un maxim la $x = \langle x \rangle$ (vezi studiile de la secțiunea II) pentru o valoare fixă b se poate da o limită inferioară pentru numărul total de citări în funcție de h:

$$\sqrt{N_{cit}} \geq h(1 - 1/b)^{-\frac{b}{2}}. \qquad 4.(3)$$

Studiul nostru anterior a arătat că distribuția de citări a autorilor este similară cu share-urile de pe Facebook și ambele sunt descrise de distribuții de tip Tsallis-Pareto (Figura 4.1 stânga) [2]. Înainte să se studieze scalarea (2) s-a validat ipoteza din [2] folosind o bază de date de citații de la Google Scholar. Au fost colectate de noi toate citările articolelor a peste 40000 de cercetătorilor folosind un robot crawler de internet. Pentru a se putea realiza o statistică adecvată a citărilor, căutarea a fost limitată la acei cercetători pentru care avem $N_{cit} > 10{,}000$ și $N_{pub} > 100$, astfel s-a asigurat o bună calitate a statisticilor pentru fiecare autor. Pentru fiecare autor a fost efectuat o regresie automataziată de tip Tsallis -Pareto pentru a determina parametrul optim de fitare b. S-a demonstrat iarăși validitatea distribuției de tip T-P (vezi ca exemplu graficele din Figura 4.1, stânga. Distribuția lui b are un maxim în jurul $b = 1.32$ și o medie în $b = 1.58$, în bună concordanță cu $b = 1.4$ propus anterior în [2] . Aceste rezultate sunt indicate în Figura 4.1, dreapta.

Scalarea dintre N_{cit}, N_{pub} și h sugerată de 4.(2) a fost validată. De asemenea, scalarea $\sqrt{N_{cit}} = 2h$ scalare propusă anterior [3] funcționează perfect pentru datele culese de noi (Figura 4.2). Limitele de la Gintropia maximă, $b \to \infty$, sunt funcționale după cum se vede în Figura 4.2.

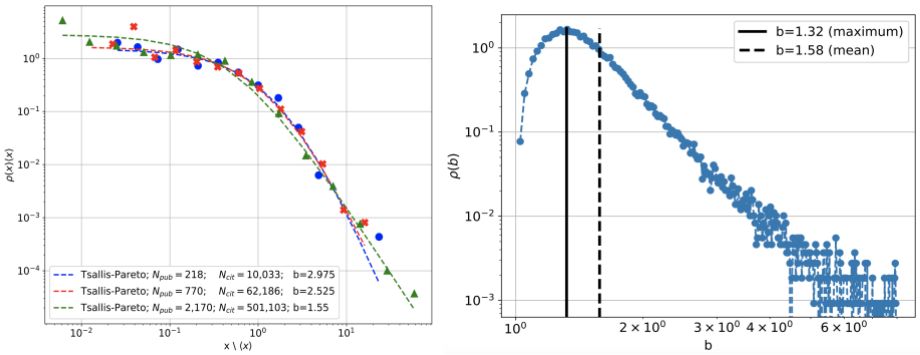

Figura 4.1: (stânga) Exemplu de validitate a densității de probabilitate de tip Tsallis-Pareto pentru distribuția citărilor pentru trei cercetători cu număr de citări mult diferiți. (dreapta) Distribuția valorilor b ajustate pentru 42089 cercetători.

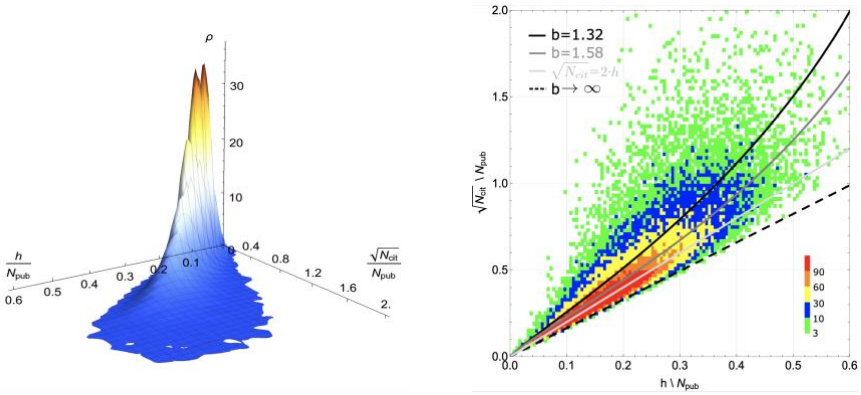

Figura 4.2: Distribuția punctelor cu coordonate $(\frac{N_{cit}}{N_{pub}}, \frac{h}{N_{pub}})$ în două reprezentări diferite. Prima ilustrează relația de scalare (2) ca o histogramă 3D, evidențiind tendința clară. În a doua reprezentare arătăm datele și modelele noastre pentru valorile maxime și medii b. Este prezentată și limită de la Gintropia maximă ($b \to \infty$). În mod interesant, scalarea deja propusă, $\sqrt{N_{cit}} = 2h$ arată cea mai bună potrivire cu datele noastre.

Se poate arăta că coeficientul Gini pentru o distribuție de tip Tsallis-Pareto este întotdeauna mai mare de 0.5. Într-adevăr, datele culese de pe Google Scholar arată aceasta și distribuția valorilor G prezintă o formă Gaussiană, cu un maxim la o valoare neașteptat de mare, în jurul valorii de $G_{max} \simeq 0.81$ (Figura 4.3). Acest lucru sugerează o inegalitate mare în numărul de citări pe care le primesc publicațiile unui cercetător.

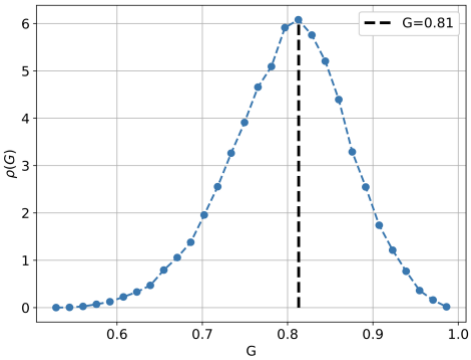

Figura 4.3: Distribuția coeficienților Gini pentru cercetătorii studiat

Bibliografie

[1] J.E. Hirsch; An index to quantify an individual's scientific output, PNAS, 46, 2005, 1656

[2] Z. Néda, L. Varga, T. S. Biró; Science and Facebook: the same popularity law! PLOS ONE 12, 2017, 0179656.

[3] W. Glänzel; On the H-index – A mathematical approach to a new measure of publication activity and citation impact. Scientometrics 67, 2006, 315.

V. Studiul rețelei neuronale cerebrale printr-un model statistic simplu

O clasa largă de rețele sunt cele integrate în spațiu (space embedded networks) precum cele logistice, de transport, de telecomunicații, etc. În cadrul sistemelor biologice modelabile ca și grafuri cele care se manifesta ca și rețete spațiale prezinta particularități aparte datorită suprapunerii aspectelor geometrice peste cele topologice (de conectivitate). Exemple în acest sens sunt: aparatul cardiovascular, sistemul limfatic sau sistemul nervos. Conform unui studiu recent numărul conexiunilor de axoni din creierul șoarecilor prezintă o scalare exponențială cu lungimea fizică a axonilor, cunoscută ca și "Exponential Distance Rule" (EDR) (Fig. 5.1 si 5.2) [1, 2].

Studiul acesta se bazează pe măsurători individuale a unui număr mare (~2 milioane) de axoni individuali. În cadrul proiectului pentru studiile în sisteme biologice s-a analizat posibilitatea extinderii acestei reguli la alte specii precum musculița (drosophila), maimuța macac sau om. Conectoamele cerebrale pentru aceste specii raportate în literatura de specialitate se referă la conexiuni multiaxonale dintre zone mai mari ale creierului (30 - 128 zone). Dependența dintre numărul de axoni și lungimea acestora arată devieri majore de la regula EDR însă devieri cu caracteristici universale. În studiile prezente, s-a verificat dacă aceste abateri se pot datora abordării grosiere (toți axonii care leagă două zone date se considera a avea același lungime) și dacă regula EDR poate fi generalizată pe o clasă largă de specii.

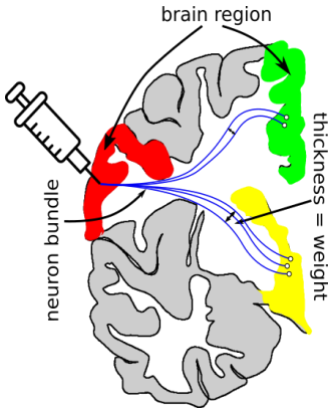

Figura 5.1: Tehnica TTT (tract tracing technique) pentru emisfera stânga. Zonele cerebrale sunt definite prin diferite culori. Numărul conexiunilor axonale definesc ponderea conexiunilor dintre regiuni

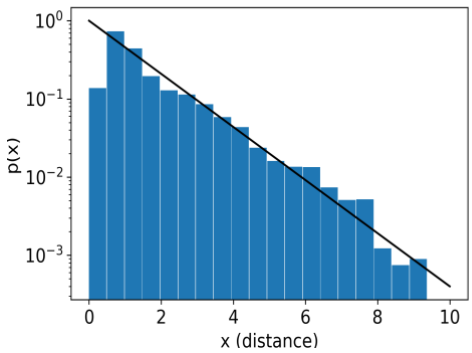

Figura 5.2: Distribuția de lungime a 1 984 074 de neuroni în creierul șoriceilor [2] arată o dependență exponențială.

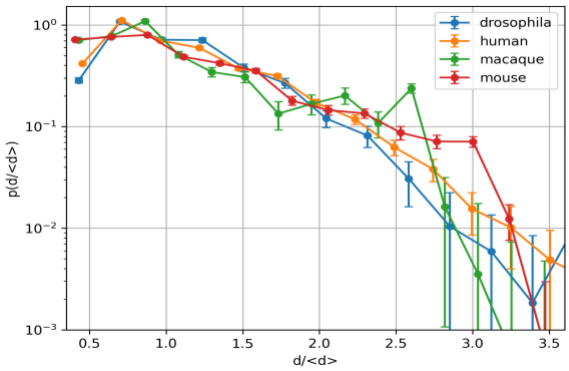

Figura 5.3: Distribuția distanțelor interzonale ponderate (cu numărul axonilor) [3] arată o dependență aproape exponențială.

Datele experimentale conțineau distanțele dintre zone și numărul axonilor care leagă zonele respective. În prima faza am observat ca lungimile axonale par să urmeze o distribuție de tip Gamma (Fig. 5.3 și 5.4).

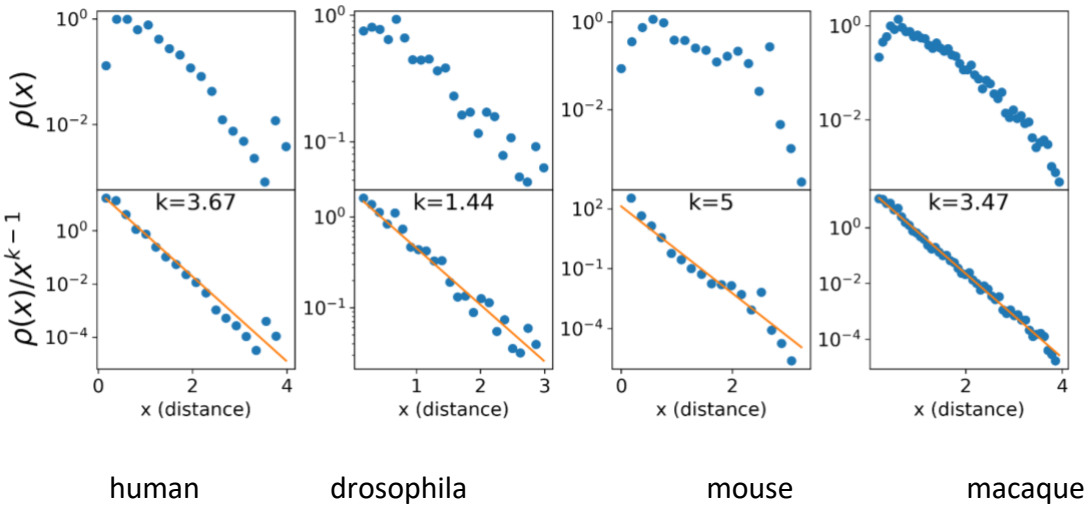

Figura 5.4: Datele din [3] (Fig. 3) modelate prin distribuția Gamma. În rândul de sus se văd histogramele originale în reprezentare semilogaritmică. În rândul de jos aceleași histograme sunt împărțite cu o funcție putere. Liniile portocalii corespund regresiei cu distribuția Gamma.

Pentru a înțelege efecte de tip „coarse-graining" (medieri la scări inferioare) în conectivitatea structurală cerebrală am construit un model unidimensional simplu cu următoarele elemente: axa reală este împărțit în segmente de lungimi aleatoare reprezentând regiunile cerebrale. Pe axa sunt plasate în mod uniform o mulțime infinită de alte segmente cu lungimi aleatoare. Se calculează analitic distribuția distanței D dintre limitele celulelor (zone cerebrale) legate de segmentele de lungime *s* (axonii) presupunând o distribuție exponențială atât pentru lungimea celulelor cât și a segmentelor conectoare. Simularea stohastică demonstrează corectitudinea calculelor analitice (Fig. 5.7). Comparația cu datele experimentale (Fig. 5.8) arată o concordanță foarte bună cu modelul teoretic. Rezultatele au fost prezentate la conferințe științifice urmând ca anul viitor să fie sintetizate într-o publicație.

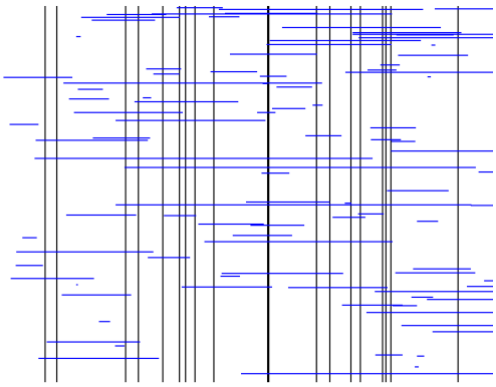

Figura 5.5: Ilustrația modelului 1D: celulele (delimitate de linii verticale negre) reprezentând zonele cerebrale sunt conectate prin segmente (linii orizontale albastre) reprezentând axonii.

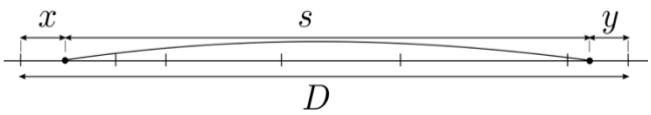

Figura 5.6: Ilustrația modelului 1D: Segmentul (axonul) de lungime *s* conectează două celule (zone cerebrale) dând naștere la o conexiune de lungime D.

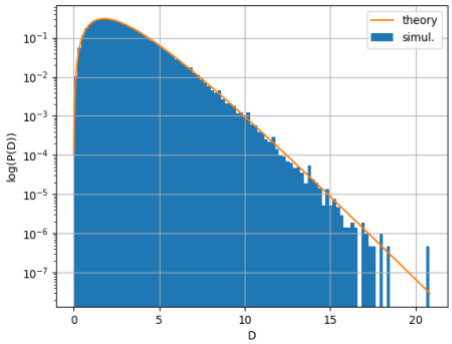

Figura 5.7: Distribuții teoretice ale distanței D: simulare vs. calcul analitic. (105 celule, 107 segmente)

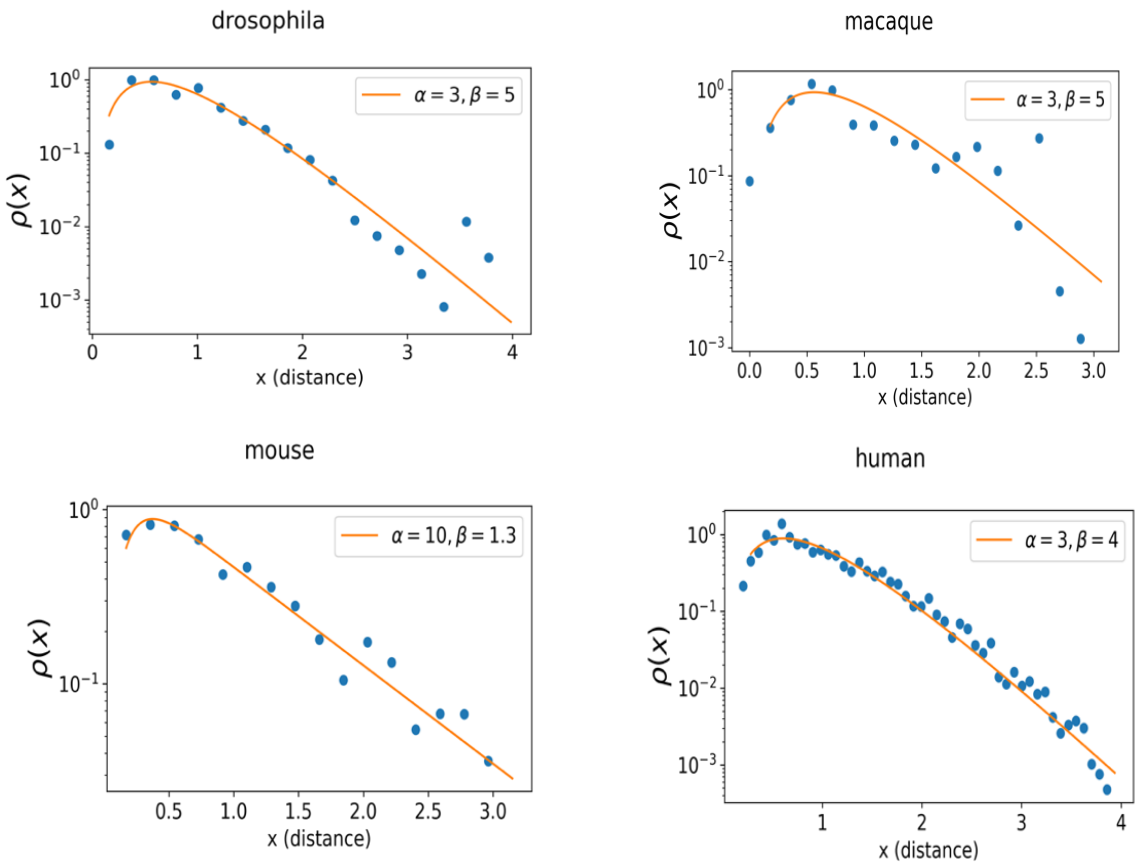

Figura 5.8: Comparația dintre modelul teoretic (curbe portocale) și experiment pentru distribuția lungimilor/distanțelor interzonale (date din [3]).

Bibliografie

[1] Ercsey-Ravasz, M., Markov, N. T., Lamy, C., Van Essen, D. C., Knoblauch, K., Toroczkai, Z., & Kennedy, H. (2013). A Predictive Network Model of Cerebral Cortical Connectivity Based on a Distance Rule. Neuron, 80(1), 184–197.
[2] Horvát, S., Gămănuț, R., Ercsey-Ravasz, M., Magrou, L., Gămănuț, B., Van Essen, D. C., Burkhalter, A., Knoblauch, K., Toroczkai, Z., & Kennedy, H. (2016). Spatial Embedding and Wiring Cost Constrain the Functional Layout of the Cortical Network of Rodents and Primates. PLOS Biology, 14(7), e1002512.
[3] Betzel, R. F., & Bassett, D. S. (2018). Specificity and robustness of long-distance connections in weighted, interareal connectomes. Proceedings of the National Academy of Sciences, 115(21), E4880–E4889.

VI. Comportamentul colectiv în coloane de fluid oscilante. Simulări computaționale.

Acest studiu a investigat oscilația și comportamentul colectiv în coloanele de fluid încălzite folosind metode numerice și computaționale de dinamica fluidelor într-o aproximație 2D. Studiile anterioare au demonstrat că flăcările difuzive pot prezenta un comportament oscilatoriu [1] respectiv o sincronizare netrivială dacă ele interacționează. Există două abordări principale pentru a explica oscilația și comportamentul colectiv. O abordare folosește reacția chimică în timpul arderii modelând oscilația ca ciclu limită [2,3]. Deși abordarea bazată pe reacții chimice poate explica atât oscilația, cât și comportamentul colectiv, experimentele efectuate pe fluxuri de fluid condus de flotabilitate sugerează că acest fenomen este rezultatul instabilităților hidrodinamice [4,5]. În lucrarea noastră anterioară [5], am studiat comportamentul oscilator și colectiv în coloanele de Heliu (s-a folosit coloana de Heliu pentru a modela fluxul condus de flotabilitate produs de flăcările de difuzie). S-a demonstrat că oscilația coloanei de Heliu și comportamentul colectiv reproduc majoritatea caracteristicilor oscilației flăcărilor. De asemenea, s-a furnizat un model simplu tratabil analitic pentru frecvența oscilației observate în coloane. Motivația principală a studiilor din anul acesta era de a oferi un model mai detaliat pentru rezultatele experimentale ale oscilației și comportării colective a coloanelor de Heliu.

În prezenta lucrare [6], am modelat fluxul condus de flotabilitate folosind coloane de lichid încălzite într-un câmp gravitațional. Fluidul din model a fost considerat un fluid ideal incompresibil. Deoarece simulările 3D sunt foarte solicitante din punct de vedere computațional, s-a folosit un domeniu de simulare dreptunghiular 2D. Pentru a rezolva numeric ecuațiile diferențiale parțiale cuplate s-a folosit pachetul software FEniCS. Pentru soluția numerică, s-a discretizat spațiului de simulare folosind o grilă triunghiulară adaptivă foarte densă, prezentat aici în Figura 6.1.

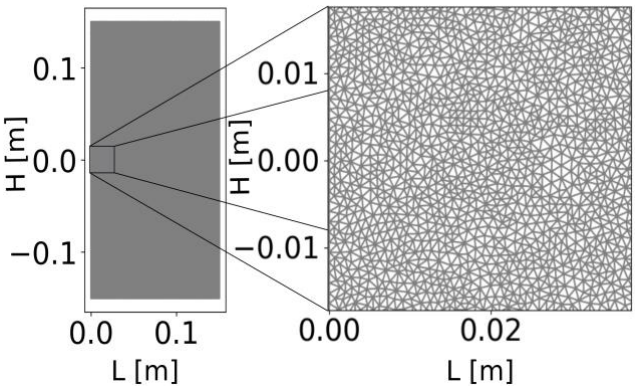

Figura 6.1 Topologia grilei utilizate în simulările numerice

Pentru soluția numerică, era nevoie de condiții de limită adecvate pentru diferitele câmpuri a mărimilor relevante (temperatura, presiune, viteza de curgere), toate acestea fiind detaliate în [6]. Cu ajutorul simulărilor numerice, s-a arătat că această abordare poate reproduce oscilațiile observate experimental și sincronizarea în antifază pentru coloanele de Heliu care interacționează, așa cum este ilustrat în Figurile 6.2 și 6.3. Cu acest model, s-a investigat influența parametrilor relevanți ai sistemului asupra dinamicii, cum ar fi efectul randamentului

fluxului și diametrul duzei pentru coloanele de fluid. Pentru comportamentul colectiv s-a studiat efectul distanței de separare dintre duze asupra frecvenței de oscilație și a parametrului de ordine de sincronizare. S-a arătat că rezultatele obținute din simulările computaționale reproduc trendurile obținute experimental atât pentru oscilația cu o singură coloană, cât și pentru oscilația sincronizată a coloanelor care interacționează. În plus, s-a reușit să se arate faptul că fenomenul acesta apare și la o scară spațială mult mai mare, ceea ce este important pentru că poate oferii posibilități pentru aplicații practice ale acestui fenomen.

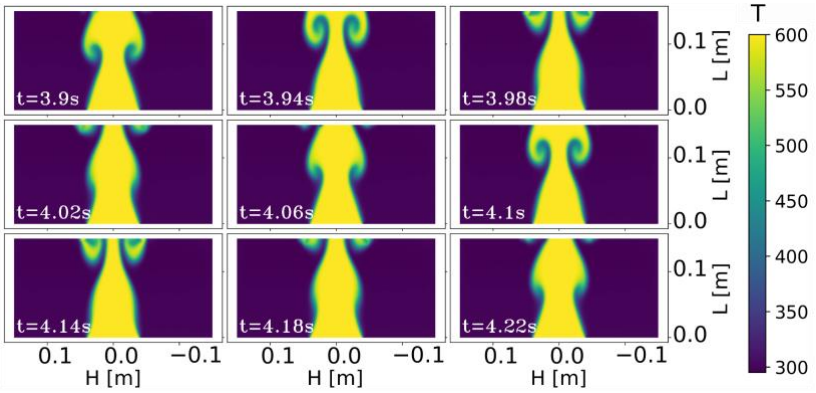

Figura 6.2 Ilustrație a oscilației pentru o coloană de fluid încălzită ilustrând spațiul de temperatură în diferite momente de timp.

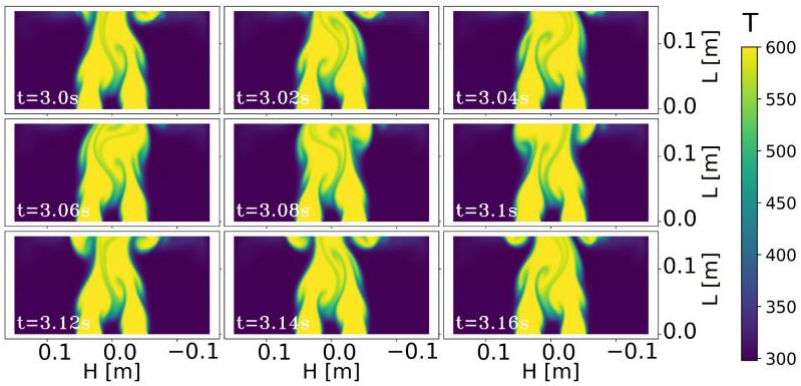

Figura 6.3 Oscilația colectivă în coloanele de fluid încălzite care interacționează, ilustrând spațiul de temperatură în diferite momente de timp.

Bibliografie

[1] Chamberlin, D. & Rose, A. The flicker of luminous flames. Proc. Symp. Combust. 1–2, 27–32.
[2] Kitahata, H. et al. Oscillation and synchronization in the combustion of candles. J. Phys. Chem. A 113, 8164–8168.
[3] Gergely A., Sándor B., Paizs C., Tötös R. and Néda Z., Flickering candle flames and their collective behavior. Scientific Reports, 2020. 10 (1): 1-13.
[4] T. Yuan, D. Durox, and E. Villermaux, “ An analogue study for flame flickering,” Exp. Fluids 17, 337 (1994).
[5] Gergely A., Paizs C., Tötös R. and Néda Z.,Oscillations and collective behavior in convective flows. Physics of Fluids 33, 124104 (2021)
[6] Gergely A. and Néda Z, Computational Fluid Dynamics Approach for Oscillating and Interacting Convective Flows. Fluids 2022, 7(11), 339;

Director Proiect
Néda Zoltán