Vektor- és tenzor-algebrai alapok

Lázár Zsolt, Józsa Máté, Lázár József

2023. július 6.

Tartalomjegyzék

1. Műveletek indexes mennyiségekkel **4**

1.1. Egy és kétindexű mennyiségek 4

1.2. Háromindexű mennyiségek 6

1.2.1. Átjárás különböző indexszámú mennyiségek között 6

1.3. Egyenletek 7

1.4. Összegzés, szorzás 7

1.4.1. Egyindexű mennyiségek 7

1.4.2. Kétindexű mennyiségek 8

1.5. Műveletek mátrixokkal 10

1.5.1. Összeadás 10

1.5.2. Szorzás 11

1.6. Összefoglaló 13

1.7. Einstein-féle összegzési konvenció 14

1.8. Feladatok 14

2. Vektorok az euklideszi térben **17**

2.1. Elemi vektorműveletek 19

2.2. Descartes-féle bázis 21

2.3. Skaláris szorzat 22

2.4. Kronecker Delta 24

2.5. Diadikus szorzat? 24

3. Lineáris algebra **24**

3.1. A kétdimenziós eukleideszi tér 24

4. Absztrakt vektorterek **26**

4.1. Vektorterek 27

4.2. Vektorok mátrixreprezentációja 32

4.2.1. Lineáris operátorok mátrix reprezentációja 32

4.3. Vektorreprezentáció transzformációja bázisváltás esetén 35

4.4. Lineáris operátorok transzformációja 35

4.5. Lineáris egyenletrendszerek geometriai értelmezése 36

4.5.1. Lineáris egyenletek mint vektorvetületek 36

4.5.2. Lineáris egyenletek mint (hiper)síkok 37

4.6. Sajátértékfeladat 37

4.6.1. Elfajult sajátértékek esete 39

4.7. Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás 41

5. Tenzorok **42**
5.1. Tenzorok reprezentációja 42
5.2. Tenzorok lineáris transzformációja 43
5.3. Tenzorok külső (tenzori) szorzata 43
5.4. Tenzorok kontrakciója 44
5.4.1. Indoklás 44
5.5. A háromdimenziós másodrendű tenzorok 46
5.5.1. A vectorok direkt szorzata és a projekciós operátor 46
5.5.2. A másodrendű tenzorok meghatározása 46
5.5.3. A másodrendű tenzorok tulajdonságai 47
5.5.4. Példák másodrendű tenzorokra 47
5.6. Magasabbrendű háromdimenziós tenzorok 47
5.6.1. A háromdimenziós tenzorok általános meghatározása 47
5.6.2. A háromdimenziós tenzorok tulajdonságai 47
5.6.3. A tenzorok alkalmazásai 47
5.7. Ko- és kontravariáns tenzorok 48
5.7.1. A kétdimenziós eukleideszi tér 49
5.8. Absztrakt vektorterek 52
5.8.1. Vektorterek 52

1. Műveletek indexes mennyiségekkel

Ebben a fejezetben rövid áttekintést kaphatunk a különböző indexes mennyiségekről, illetve az ezekkel végezhető matematikai műveletekről. Ezen jelölések célja a matematikai formalizmus egyszerűbb és kompaktabb formába hozata.

1.1. Egy és kétindexű mennyiségek

A fizikában sokszor történik, hogy egy fizikai mennyiség komponensei által van reprezentálva. Az egyik legegyszerűbb példa a helyzetvektor. Ez a newtoni mechanikában egy valós számhármas által van reprezentálva. A sebesség egy másik példa: van x, y, z irányú komponense. Ezeket a komponenseket egy listába sorolhatjuk:

$$\boldsymbol{v} := (v_x, v_y, v_z).$$

1.1. Megjegyzés. *Annak ellenére, hogy ez a motiváció, ebben a fejezetben nem! fogunk feltétlen gondolni arra, hogy az indexelt mennyiségek vektorokat reprezentálnak. Ez csak egy módszer, kompakt jelölésmód. Ahhoz, hogy vektorokhoz illetve mátrixokhoz legyen köze a jelölésmódnak, különleges módon kell transzformálódjanak. Magyarán: vektor index=szabad index+ extra szabályok.*

A példák láttán, bevezetünk egy matematikai formalizmust, amely indexes mennyiségeket kezelni tud. Ezen fejezetben nem foglalkozunk az indexes mennyiségek fizikai jelentésével- csak példát adtunk, hogy igenis megjelennek a fizikában, s emiatt érdemes őket tisztán matematikai szempontból tanulmányozni. A későbbi fejezetekben sok fizikai példát fogunk látni, amely indexes mennyiségként kezelhető, és nem csak egy indexxel.

1.2. Definíció. *Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok. Bevezetjük a következő jelölést:*

$$a_1, a_2, \dots, a_n := \{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$$

Ebben az esetben a_i-t egyindexű mennyiségnek nevezzük és i-t szabad, indexnek, amely 1-től n-ig fut.

1.3. Példa. *Legyen $(10, 9, 5, 4, \cos(\pi), \sqrt{2}, \pi)$ egy valós számokból álló lista. Ez reprezentálható egyindexes mennyiségként a következő képpen:*

$$a_1 := 10, a_2 := 9, a_3 := 5, a_4 := 4, a_5 := \cos(\pi), a_6 := \sqrt{2}, a_7 = \pi.$$

Tehát ez egyindexű mennyiségként felírható $\{a_i\}_{i=\overline{1,7}}$, ahol a szabad index 7 értéken át fut. Minden egyes értékére a szabad indexnek, egy valós számot kapunk.

1.4. Megjegyzés. *A szabad index jelöléséhez használhatunk görög vagy latin betűket is.*

Az indexes jelölést a következőkben általánosítjuk kétindexű mennyiségekre is. Gyakorlatilag $n \cdot m$ számot szeretnénk kompakt formában ábrázolni. Ehhez két indexre van szükségünk i, j, amely közül egyik 1-től n-ig fut, a másik 1-től m-ig. Tehát egy kétindexes mennyiség a következő alakot ölti:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix} \equiv \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$$

Ez azt jelenti, hogy amennyiben megadunk két konkrét számot az indexek helyére, egy valós számot kapunk, például $i = 1, j = 2$-re a_{12} valós számot. Általában i-t sor indexnek nevezzük, míg j-t oszlop indexnek.

1.5. Példa. *Egy 2×2 mátrix ábrázolható egy kétindexű mennyiségként.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{\pi} & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

Ebben az esetben a kétindexű mennyiség $\{a_{ij}\}_{i=\overline{1,2}, j=\overline{1,2}}$, ahol

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = \sqrt{\pi}, a_{22} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Tehát, amennyiben megadunk a szabad idexekre konkrét értéket, egy valós számot kapunk.

1.6. Megjegyzés. *Két egyindexű $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{b_j\}_{j=\overline{1,m}}$ mennyiségből képezhetünk egy kétindexű $\{c_{ij}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ mennyiséget szorzás által:*

$$c_{ij} := a_i \cdot b_j.$$

Konkrétan, $\{c_{ij}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ a következő alakot ölti:

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_m \end{matrix}.$$

Ennek van specifikus esete is, ha $n = m$, ekkor c_{ij} egy négyzetes mátrixot reprezentál:

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{matrix} \tag{1}$$

1.7. Megjegyzés. *Nem csak egyindexes mennyiségekből lehet képezni kétindexű mennyiségeket. Kétindexű mennyiségekből is képezhetünk egyindexű mennyiséget, amennyiben a két szabad index ugyanazon értékhalmazban fut, tehát ha i és j mindkettő 1-től n-ig fut:*
$a_{ii}, a_i b_i$ mennyiségek egy szabad indexel rendelkeznek (ha $n = m$)

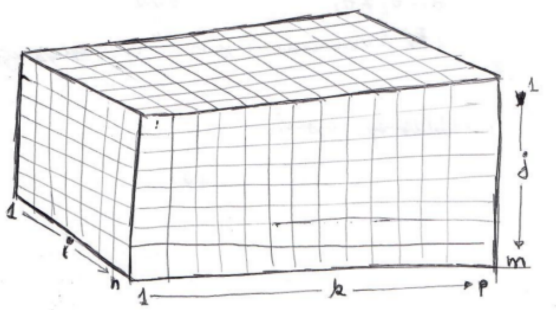
$$a_{ii} \rightarrow \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \qquad a_i b_i \rightarrow \begin{matrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{matrix}$$

1.2. Háromindexű mennyiségek

Az előzőek alapján, egyszerűen bevezethetünk háromindexű mennyiségeket is:

$$\{c_{ijk}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}}.$$

Amennyiben lerögzítünk egy számhármast (i, j, k), kapunk egy valós számot. Mivel i n értéket vehet fel, j m értéket és k p értéket, azt jelenti, hogy $n \cdot m \cdot p$ darab számot tartalmaz a háromindexű mennyiség. Ez három dimenzióban téglatest szerű elrendezésben képzelhető el:



1.2.1. Átjárás különböző indexszámú mennyiségek között

Az előbb láthattuk, hogy két egyindexű mennyiségből képezhetünk egy kétindexű mennyiséget, s specifikus esetben kétindexű mennyiségekből is képezhettünk egyindexű mennyiségeket. Háromindexű mennyiségeket két féle képpen képezhetünk két-és egyindexű mennyiségekből:

1. Egy kétindexű és egyindexű mennyiség szorzataként: $c_{ijk} := a_i b_{jk}$, ahol $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ egyindexű mennyiség és $\{b_{jk}\}_{j=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}}$ kétindexű mennyiség.
2. Három egyindexű mennyiség szorzataként: $c_{ijk} := a_i b_j \cdot c_k$, ahol $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{b_j\}_{j=\overline{1,m}}, \{c_k\}_{k=\overline{1,p}}$ egyindexű mennyiségek.

Nagyobb indexszámú mennyiségekből is képezhetünk kisebb indexszámú mennyiségeket:

1. Háromindexű mennyiségekből képezett kétindexes mennyiségek:

$$c_{iij}, c_{jij}, c_{ijj}.$$

2. Háromindexű mennyiségből képezett egyindexű mennyiség: c_{iii}.

1.3. Egyenletek

A következőben indexes mennyiségekre érvényes és érvénytelen egyenlőségeket fogunk illusztrálni. Érvényes egyenlőségek:

1. $a = b$ egy darab egyenlet;
2. $a_i = b_i$, ahol $i = \overline{1,n}$, azaz $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Ez n darab egyenlet.
3. $a_{ij} = b_{ij} = c_i d_j$, ahol $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$. Ez $n \cdot m$ darab egyenlet.

Érvénytelen egyenlőségek:

1. $a_i = b_k, a = b_i$;
2. $a_{ij} = b_i, a_{ij} = b_{ik}, a_{ij} = b$.

Ahhoz, hogy egy egyenlőség érvényes legyen, a következő szabálynak kell eleget tennie:

Egy egyenlet mindkét oldalán elhelyezkedő mennyiségek azonos szabad indexekkel rendelkeznek.

1.4. Összegzés, szorzás

1.4.1. Egyindexű mennyiségek

Legyen $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ egyindexű mennyiség, ahol i szabad index, amely 1-től n-ig fut. Ebből az egyindexű mennyiségből képezhető egy A szám a következő képpen, ha i-t szerint összegzünk, futó indexként kezeljük:

$$A := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Jelölés szempontjából bevezetjük az összegzési jelölést és ha tiszta a kontextusból, nem fogjuk kiírni, hogy a futó index mettől meddig vesz fel értékeket:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n := \sum_{i=1}^{n} a_i := \sum_i a_i.$$

Amennyiben van egy másik egyindexű mennyiségünk, $\{b_i\}_{i=\overline{1,n}}$, abból is hasonlóan képezhetünk egy B számot:

$$B := b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum_i b_i.$$

A szabad index átnevezhető tetszőlegesen, ameddig ugyanazon értékek között mozog. Konkrétan, ezt azt jelenti, hogy b_i jelölhető b_k, vagy akár b_α-ként is, amennyiben k és α ugyanúgy 1-től n-ig vesznek fel értékeket. Eddig két egyindexű mennyiségből képeztünk két valós számot. Ezt a két A, B valós számot összeadhatjuk:

$$A+B=\sum_i a_i+\sum_k b_k=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=$$
$$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=\sum_i (a_i+b_i)\,.$$

Az összegzés linearitását felhasználva, bevezethetjük a skalárral való szorzást is:

$$\alpha A=\alpha\sum_i a_i=\alpha\,(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\alpha a_1+\cdots+\alpha a_n=\sum_i \alpha a_i.$$

1.4.2. Kétindexű mennyiségek

Mint említettük feljebb is, kétindexű mennyiségre jó példa a mátrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \equiv a_{ij}, \quad i \text{ sor index, } j \text{ oszlop index}$$

Egy mátrix $n\cdot m$ valós számot tartalmaz. Összegezhetjük sorait:

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m} &= \sum_{i=1}^{m} a_{1i}=b_1, \\ a_{21}+a_{12}+\cdots+a_{2m} &= \sum_{i=1}^{m} a_{2i}=b_2, \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nm} &= \sum_{i=1}^{m} a_{ni}=b_n, \end{aligned}$$

Vagy általánosan, felírhatjuk, hogy:

$$b_j=a_{j1}+a_{j2}+\cdots+a_{jm}=\sum_{i=1}^{m} a_{ji}, \quad j \text{ szabad index, } i \text{ futó index, .}$$

Ez azt jelenti, hogy j n darab értéke vesz fel. Tehát amennyiben $j=1$, visszakapjuk b_1-et, amennyiben $j=2$, visszakapjuk b_2-t és így $j=n$-ig. Továbbá, ezeket is összegezhetjük, hogy kapjunk egy számot:

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=\sum_{j=1}^{n} b_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\right)=$$

$$\begin{aligned} & a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m}+ \\ & a_{21}+a_{12}+\cdots+a_{2m}+ \\ & \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nm} \equiv \sum_{j,i} a_{ji}=c\ . \end{aligned}$$

Összegzésképpen, megjegyezzük, hogy az előbb két lépésben állítottunk elő kétindexű mennyiségből egy számot. Elsősorban, a kétindexű mennyiség, ez esetben mátrix sorainak összegéből képeztünk egy egyindexű mennyiséget, $\{b_j\}_{j=\overline{1,n}}$, majd ebből az előző fejezetben bevezetett művelettel képeztünk egy számot.
Elvégezhetjük ugyanezt az oszlopokra is:

$$\begin{aligned}
a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{n1} &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} = B_1, \\
a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{n2} &= \sum_{i=1}^{n} a_{i2} = B_2, \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
a_{1m}+a_{2m}+\cdots+a_{nm} &= \sum_{i=1}^{n} a_{im} = B_m,
\end{aligned}$$

Tehát, általánosan képezhetünk egy egyindexű $\{B_k\}_{k=\overline{1,m}}$ mennyiséget, ahol:

$$B_k = a_{1k}+a_{2k}+\cdots+a_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}.$$

1.8. Megjegyzés. *Amennyiben a mátrix nem négyzetes, az oszlopoknál számolt összegből képezett egyindexű mennyiség szabad indexe nem egyezik meg a sorok összegéből számolt egyindexű mennyiség szabad indexével. Különböző értékek között vesznek fel értékeket. Egyik* $1,n$*, míg a másik* $1,m$*. Csak* $n=m$ *esetén ugyanaz. Ez egy konkrét példa arra, hogy amennyiben a mátrix nem négyzetes, a következő egyenlőségnek nincs értelme, helytelen:*

$$b_j = B_k \text{ értelmetlen, ha a mátrix nem négyzetes.}$$

Az összegzés esetén az összes futóindex a rájuk vonatkozó $\sum$ összegzési szimbólumtól jobbra kell elhelyezkedjen. Példák:

1. $\sum_i a_i \sum_k b_{ik}$ - helyes;
2. $\sum_k a_{ik} \sum_i b_i$ - helytelen, mivel i a szumma előtt van;
3. $a_i \sum_{i,j} b_j c_i$ - helytelen, mivel i a szumma előtt van.

A fentiek alapján összefoglalhatjuk, hogy:

1. Egyindexű mennyiség felösszegzése $\rightarrow$ szám;
2. Kétindexű mennyiség felösszegzése $\rightarrow$ egy szabadindexú mennyiség;
3. Kétindexű mennyiség kétszeres felösszegzése (mindkét index szerint) $\rightarrow$ szám.

1. Ha a két indexünk megegyezik, akkor már nem ugyanarról a mennyiségről beszélünk:

$$\sum_{i,j} a_{ij} \neq \sum_{i} a_{ii}.$$

2. $$A \cdot B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \neq \sum_{i} a_i b_i.$$

   Viszont mindkettő szám!

Most bizonyítjuk a második megjegyzést:

$$\begin{aligned} A \cdot B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \\ &\color{blue}{a_1 b_1} \color{black}{+ a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_n +} \\ &a_2 b_1 + \color{blue}{a_2 b_2} \color{black}{+ \cdots + a_2 b_n +} \\ &\vdots \\ &a_n b_1 + a_n b_2 + \cdots + \color{blue}{a_n b_n} \color{black}{= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j.} \end{aligned}$$

Viszont láthatjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ csak a kék tagokat tartalmazza. Emiatt a két mennyiség nem egyenlő. Ebből az a tanulság, hogy összeszorzott összegek futóindexei átnevezendők mielőtt összevonjuk az összegeket.

1.5. Műveletek mátrixokkal

A mátrixok kétindexű mennyiségek, amelyekre sajátos szabályok szerint értelmezünk műveleteket, mint az összeadás és szorzás.

1.5.1. Összeadás

Legyenek $\{a_{ij}\}_{i=\overline{1,n},j=\overline{1,m}}, \{b_{ij}\}_{i=\overline{1,p},j=\overline{1,q}}$ kétindexű mennyiségek. Amennyiben összeadást és szorzást értelmezünk rájuk specifikusan, mátrixok lesznek, amelyeket $\mathbf{A},\mathbf{B}$-vel jelölünk és következő képpen ábrázolunk:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pq} \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben:

1. $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbf{R})$, $\dim(\mathbf{A}) = n \times m$;
2. $\mathbf{B} \in \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbf{R})$, $\dim(\mathbf{B}) = p \times q$.

Az összeadás csak akkor értelmezett, ha $n = p, m = q$, vagyis csak azonos dimenziójú mátrixokat adhatunk össze. Ekkor az összeadás a következő képpen történik:

$$\mathbf{C} := \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Vagyis, indexes mennyiségben, ez azt jelenti, hogy van egy kétindexű mennyiségünk $\{c_{ij}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$, ahol:

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}.$$

1.5.2. Szorzás

Hasonlóan, mint az előbb vegyük ugyanazokat a kétindexű mennyiségeket $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}$ és a hozzájuk tartozó mátrixokat:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}.$$

A szorzás csak akkor értelmezett, ha $m = p$, vagyis ha a belső méretek megegyeznek: az első mátrixnak ugyannyi oszlopa kell legyen, mint a második mátrixnak sora, a mi esetünkben m.. Ekkor a szorzást az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\dots+a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12}+\dots+a_{1m}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{1q}+\dots+a_{1m}b_{mq} \\ a_{21}b_{11}+\dots+a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12}+\dots+a_{2m}b_{m2} & \cdots & a_{21}b_{1q}+\dots+a_{2m}b_{mq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\dots+a_{nm}b_{m1} & a_{n1}b_{12}+\dots+a_{nm}b_{m2} & \cdots & a_{n1}b_{1q}+\dots+a_{nm}b_{mq} \end{pmatrix}.$$

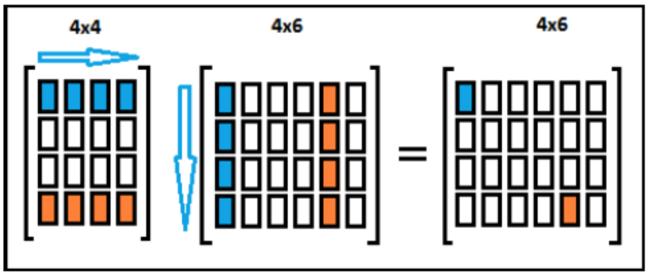
Ebben az esetben a következők érvényesek:

1. $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R}),\ \dim(\mathbf{A}) = n \times m;$
2. $\mathbf{B} \in \mathrm{Mat}(m \times q, \mathbb{R}),\ \dim(\mathbf{B}) = m \times q;$
3. $\mathbf{C} \in \mathrm{Mat}(n \times q, \mathbb{R}),\ \dim(\mathbf{C}) = n \times q.$

A fenti mátrixjelölés indexes jelölésben is felírható. Adott $\{a_{ij}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ és $\{b_{jk}\}_{j=\overline{1,m}, k=\overline{1,q}}$ kétindexű mennyiségek. Ekkor a szorzatuk mátrix szorzás értelmében egy harmadik $\{c_{ik}\}_{i=\overline{1,n}, k=\overline{1,q}}$ kétindexű mennyiség, amely a következő képpen van definiálva:

$$\boxed{c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk},\ \ i = \overline{1,n},\ \ k = \overline{1,q}.}$$

A fentebb megadott algebrai szabály a szorzásra vizualizalható a következő képpen:



1.9. Megjegyzés. *A mátrixok szorzása nem kommutatív!*

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}$$

Egyszerű ellenpélda kedvéért, vegyük a következő mátrixokat:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben:

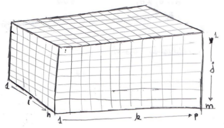
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vagyis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. *Ez a példa igenis hasznos a fizikában, ugyanis a fenti két mátrix Pauli-mátrixok, amelyek kvantummechanikában a spin leírásához vannak használva.*

1.6. Összefoglaló

Az alábbi táblázatban a különböző számú (egy - három) indexes mennyiségek megnevezései, mátrixos reprezentációi találhatóak:

a	skalár	1×1	$\bullet$
b_i	vektor oszlop mátrix sor mátrix	$n\times 1$ vagy $1\times n$	$\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{b} \\ \vert \end{pmatrix}$ vagy $\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{b}^\top & \breve{} \end{pmatrix}$
m_{ij}	mátrix	$n\times p$	$\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{M} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix}$
c_{ijk}	háromindexes mennyiség	$n\times p\times q$	

Összefoglalunk továbbá néhány indexes jelöléssel leírt egyenletet és azoknak mátrixos megfelelőit:

$a\cdot b=c$	$\bullet\cdot\bullet=\bullet$
$a_i\cdot b=c_i$	$\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{a} \\ \vert \end{pmatrix}\cdot b=\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{c} \\ \vert \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{a}^\top & \breve{} \end{pmatrix}\cdot b=\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{c}^\top & \breve{} \end{pmatrix}$
$a_i\cdot b_j=c_{ij}$	$\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{a} \\ \vert \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{b}^\top & \breve{} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{C} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{b} \\ \vert \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{a}^\top & \breve{} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{C}^\top & \\ & & \diagdown \end{pmatrix}$
$\sum_i a_ib_i=c$	$\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{a}^\top & \breve{} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{b} \\ \vert \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{b}^\top & \breve{} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{a} \\ \vert \end{pmatrix}=c$
	$Tr\left[\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{a} \\ \vert \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{b}^\top & \breve{} \end{pmatrix}\right]=Tr\left[\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{C} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix}\right]$
$\sum_i a_ib_{ij}=c_j$	$\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{a}^\top & \breve{} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{B} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \breve{} & \mathbf{c}^\top & \breve{} \end{pmatrix}$
$=\sum_i b_{ij}a_i=\sum_i b^\top_{ji}a_i$	$\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{B}^\top & \\ & & \diagdown \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{a} \\ \vert \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vert \\ \mathbf{c} \\ \vert \end{pmatrix}$

1.7. Einstein-féle összegzési konvenció

Indexek összevonásakor az összegzés magától értetődik és a $\sum$ jel elhagyható. Ez azt jelenti, hogy amely index kétszer jelenik meg, arra összegzünk.

1.10. Példa. *Az összegzési konvenció a következő képpen értődik:*

1. $a_{ij}b_{ki}c_{lkm} = \sum_{i,k} a_{ij}b_{ki}c_{lkm}$;
2. $a_{ij}b_kc_{lk}d_if_l = \sum_{i,k,l} a_{ij}b_kc_{lk}d_if_l$.

1.8. Feladatok

Feladat 1.1

Végezzük el az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ szorzatot, ahol:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Feladat 1.2

Négyzetes mátrixokra vonatkozóan igazoljuk az alábbi összefüggéseket:

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top\cdot\mathbf{A}^\top$;
3. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ - szorzással szembeni asszociativitás;
4. $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$;
5. $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$.

Feladat 1.3

Határozzuk meg az alábbi tenzoriális kifejezések szabadindexeit és rendjét használva az Einstein-féle összegkonvenciót. Pl.

$$a_{ij}b_{kjl} = c_{ikl} \quad (3.\text{rendű})$$

1. $D_{jkl}c_{klm}a_{ij}$;
2. $B_{abc}D_{def}E_{kl}a_iF_{febcl}H_j$;
3. $a_{ik}b_ic_kD_{lm}$.

Feladat 1.4

Írjuk át tenzoriális alakra a következőket:

1.

$$\begin{pmatrix} \smile & \mathbf{d} & \smile \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{A} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \mathbf{c} \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \smile & \mathbf{b} & \smile \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{E} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} = ?$$

2.

$$\begin{pmatrix} \smile & \mathbf{b} & \smile \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{C} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{D} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \mathbf{a} \\ | \end{pmatrix} = ?$$

3.

$$\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & f \circ g & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & \mathbf{D} & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \mathbf{e} \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \smile & \mathbf{c} & \smile \end{pmatrix} = ?$$

Feladat 1.5

Alakítsuk át mátrix alakba a következőket az alábbi példa alapján (az előző feladat fordítottja).

$$\sum_{i,j} a_i b_j C_{ji} = ?$$

I. megoldás:

$$\sum_{i,j} a_i b_j C_{ji} = Tr \left[\begin{pmatrix} | \\ a \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \smile & b & \smile \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & C & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \right] = Tr \left[\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & a \circ b & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & C & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \right] =$$

$$= Tr \left[\begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & (a \circ b) \cdot C & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \right]$$

II. megoldás:

$$\sum_{i,j} a_i b_j C_{ji} = b_j C_{ji} a_i = \begin{pmatrix} \smile & b & \smile \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ & C & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ a \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \smile & b & \smile \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ C \cdot a \\ | \end{pmatrix} = b \cdot C \cdot a.$$

Feladat 1.6

Ugyanaz a feladat, mint előbb:

1.
$$\sum_{j,m} b_j C_{jm} A_{im} = ?$$

2.
$$\sum_{j} a_i b_j c_j = ?$$

3.
$$\sum_{i,l} a_i b_j C_{kl} D_{li} = ?$$

4.
$$\sum_{i,j,k} A_{ij} B_{jk} c_k A_{il} = ?$$

5.
$$\sum_{k} A_i b_k C_{kj} = ?$$

2. Vektorok az euklideszi térben

A fizikai mennyiségek leírására matematikai objektumokat használunk. Vannak fizikai mennyiségek, amelyek leírhatók egy skalár, szám által- ezeket skaláris fizikai mennyiségeknek nevezzük. Példaként felhozható a hőmérséklet, tömeg, elektromos töltés. Nem minden fizikai mennyiség írható le csak egy számmal. az erőnek például van iránya is. További példák a sebesség, gyorsulás, impulzus. Ezen fizikai mennyiségek leírásához, egy új matematikai objektumra van szükségünk- vektorokra. A legintuitívebb módon, egy euklideszi térben lévő vektor egy irányított szakasz: van nagysága, iránya és irányítása. Viszont amennyiben így definiáljuk a vektort, nehézségekbe ütközünk, amikor az összeadást definiáljuk geometriailag. Ezt a nehézséget bemutatjuk a 2D euklideszi tér $\mathbb{R}^2$ esetén. Emiatt a következőkben $\mathbb{R}^2$ elemeit fogjuk nevezni vektoroknak és műveleteket fogunk rájuk értelmezni.
Legyen $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ egy vektor. Ebben az esetben $\boldsymbol{v}$-t tudjuk egy irányított szakasz által reprezentálni: a 2d koordináta rendszerben az a szakasz, amely az origót $(0,0)$ és (v_1, v_2) pontokat köti össze.

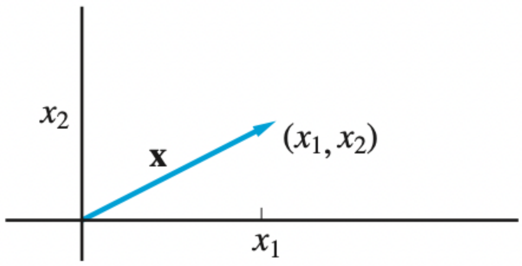


Figure 3.1.1.

Amennyiben azonosítjuk azokat a szakaszokat, amelyeknek ugyanolyan iránya és hossza van, a $\boldsymbol{v}$ vektor azonosítható bármely irányított szakasszal, amely összeköti a következő 2 pontot: $(a,b), (a+v_1, b+v_2)$.

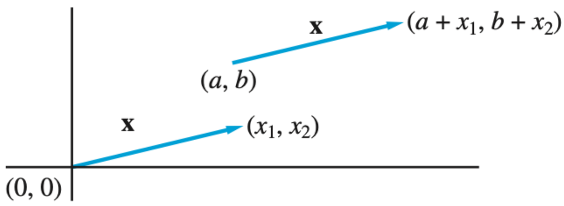


Figure 3.1.2.

2.1. Példa. *Legyen $\boldsymbol{x} = (2,1) \in \mathbb{R}^2$. Ebben az esetben, ez a vektor ábrázolható három különböző irányított szakasz által is, amely a következő pontokat köti össze:*

1. $(2,2), (4,3)$;

2. $(-1,1), (1,0)$;

3. $(0,0), (2,1)$;

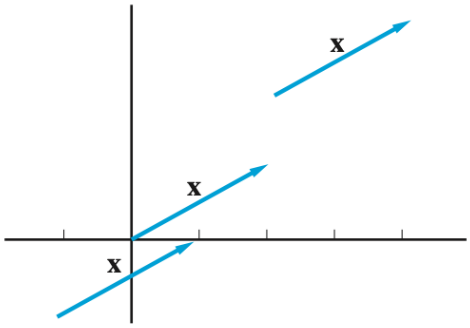


Figure 3.1.3.

Egy euklideszi vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ hosszát azonosítjuk bármely szakasz hosszával, amellyel $\boldsymbol{v}$-t azonosítjuk. Emiatt a Pithagorasz tétel értelmében $\boldsymbol{v}$ hossza $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, amely az alábbi ábrán látható:

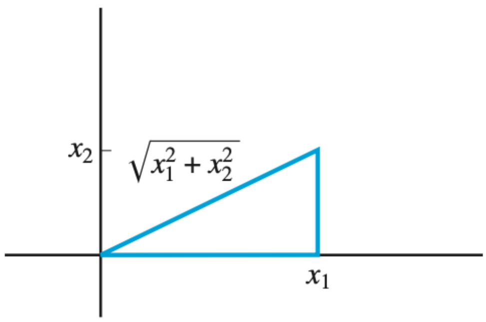


Figure 3.1.4.

2.1. Elemi vektorműveletek

Vektorok összeadása

2.2. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ két vektor. Az összeadás egy leképezés*

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ +((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Az $(u_1 + v_1, u_2 + w_2)$ vektort az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok összegének nevezzük és $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$-vel jelöljük.

Amennyiben a vektorokat irányított szakaszokkal ábrázoljuk, az összeadás a paralelogramma szabály szerint történik. A nehézség, amibe ütközünk az, hogy a paralelogramma szabály alkalmazásához a két szakasz egy pontban kell találkozzon. Amennyiben ez nem így van, el kell tolnunk párhuzamosan az egyiket a találkozási pontig. Ez a nehézség pont az által van kezelve, hogy egy vektort több irányított szakasz is reprezentálhat, nem csak egy, mint feljebb tárgyaltuk. Emiatt, bármelyik vektort eltolhatjuk párhuzamosan az origóba, és ez lesz a találkozási pont. Geometriailag a következő képpen lehet ezt ábrázolni:

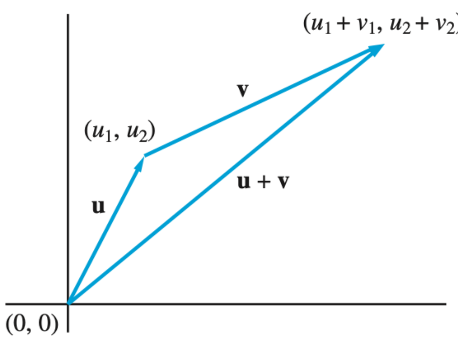


Figure 3.1.6.

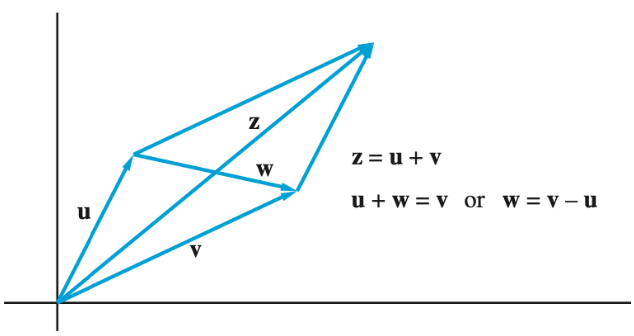


Figure 3.1.7.

2.3. Tétel. $(\mathbb{R}^2,+)$ *egy kommutatív csoport, vagyis:*

1. $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{z})$;
2. $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$;
3. $(0,0)+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+(0,0)=\boldsymbol{v},\ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$.
4. $\boldsymbol{v}+(-v_1,-v_2)=(-v_1,-v_2)+\boldsymbol{v}=(0,0)\ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$.

A fenti tétel úgy algebrai, mint geometriai igazolását az érdeklődő olvasóra bízzuk.

Skalárral való szorzás

Ez gyakorlatilag a vektort reprezentáló szakasz bármelyikének a nyújtását, zsugorítását jelenti. Formálisan a következő képpen lehet definiálni:

2.4. Definíció. *Legyen* $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$. *A* $\boldsymbol{v}$ *vektor* $\alpha\in\mathbb{R}$ *skalárral való szorzása egy* $f_\alpha:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *leképzés, amely teljesíti:*

$$f_\alpha(\alpha,(v_1,v_2)):=(\alpha v_1,\alpha v_2).$$

Az $(\alpha v_1,\alpha v_2)$ *vektort* $\alpha\boldsymbol{v}$*-vel jelöljük.*

2.5. Példa. *Legyen* $\boldsymbol{v}=(2,1)$, *amint ez a 3.1.5 ábrán látható. Ebben az esetben:*

$$-\boldsymbol{v}=(-2,-1),\ 3\boldsymbol{v}=(6,3),\ -2\boldsymbol{v}=(-4,-2).$$

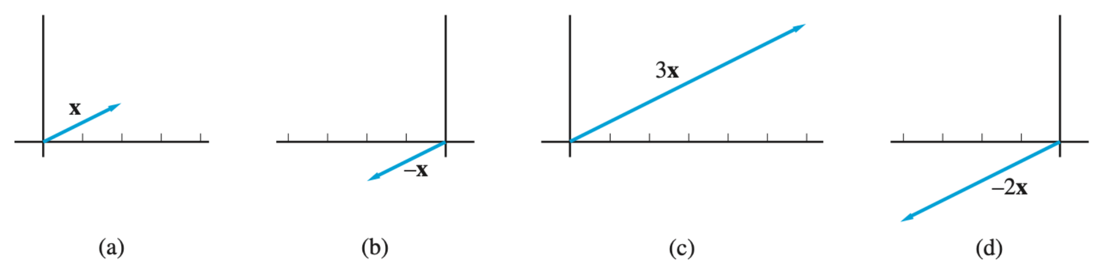


Figure 3.1.5.

Az $\alpha=-1$*-el való szorzás a ponttükrözésnek felel meg. Abban az esetben, amikor* $\alpha=3$, *a vektor hosszát háromszorozzuk, tehát ez egy nyújtásnak felel meg.*

2.6. Állítás. *Legyenek* $\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2)$ *vektorok. Ekkor az* α *skalárral való szorzására* f_α *a következők érvényesek:*

1. $|f_\alpha(\alpha, \mathbf{v})| = |\alpha||\mathbf{v}|$;
2. $f_\alpha(\alpha, (v_1 + w_1, v_2 + w_2)) = f_\alpha(\alpha, (v_1, v_2)) + f_\alpha(\alpha, (w_1, w_2))$;
3. $\alpha = 0$ *esetén* $f_0(0, (v_1, v_2)) = (0, 0)$.

Bizonyítás. 1. A skalárral való szorzás definiciójának értelmében:

$$|f_\alpha(\alpha, \mathbf{v})| = |(\alpha v_1, \alpha v_2)|.$$

A feljebb említett Pithagorasz tételt használva:

$$|(\alpha v_1, \alpha v_2)| = \sqrt{\alpha^2 v_1^2 + \alpha^2 v_2^2} = \sqrt{\alpha^2 (v_1^2 + v_2^2)} = |\alpha| \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |\alpha||\mathbf{v}|.$$

2. Induljunk ki a bal oldalból és használjuk fel a skalárral való szorzás definícióját:

$$f_\alpha(\alpha, (v_1 + w_1, v_2 + w_2)) = (\alpha(v_1 + w_1), \alpha(v_2 + w_2)) = (\alpha v_1 + \alpha w_1, \alpha v_2 + \alpha w_2).$$

A kétdimenziós euklideszi téren értelmezett összeadásból következik, hogy:

$$(\alpha v_1 + \alpha w_1, \alpha v_2 + \alpha w_2) = (\alpha v_1, \alpha v_2) + (\alpha w_1, \alpha w_2),$$

amit felírhatunk az α-val való szorzás segítségével, mint:

$$f_\alpha(\alpha, (v_1, v_2)) + f_\alpha(\alpha, (w_1, w_2)).$$

3. Induljunk ki a 0-val való szorzás definíciójából:

$$f_0(0, (v_1, v_2)) = (0v_1, 0v_2) = (0, 0).$$

□

Geometriailag 3D-ben is hasonlóan járunk el, mint feljebb 2d-ben. Az alábbi ábra egy 3D euklideszi vektor geometriai reprezentációja. Az összeadás geometriailag megint úgy történik, hogy az origóba toljuk el a vektorokat, majd paralelogramma szabályt alkalmazunk.

2.2. Descartes-féle bázis

Az alábbiakban a 3D euklideszi vektorok geometriai reprezentációval fogunk dolgozni. Mivel minden vektort eltolhatunk az origóba, értelme van annak, hogy a három koordinátatengelyen levő egységvektoroknak konkrét nevet adjunk, és tetszőleges vektort bontsunk fel ezek segítségével.

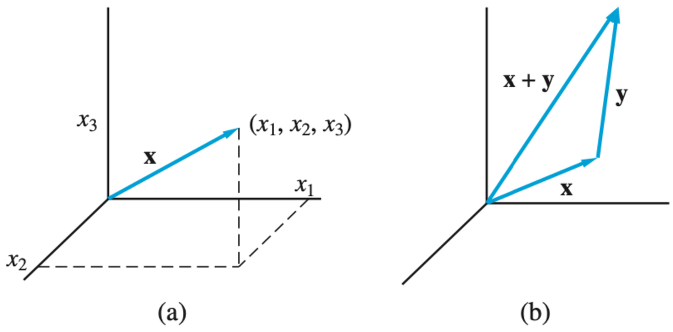


Figure 3.1.8.

2.7. Definíció. *Az* $\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)$ *vektorokat az* x,y,z *tengelyek egységvektorainak nevezzük.*

Ide kene tenni kepet i,j,k-rol a 3D koordinata rendszerben.

2.8. Megjegyzés. *Egy tetszőleges 3D euklideszi vektor* $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$ *felírható* $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ *lineáris kombinációjaként:*

$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}.$$

Emiatt a $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ *halmaz egy bázist alkot a 3D euklideszi vektorok terén, s ezt a bázist Descartes-féle bázisnak nevezzük. Továbbá ez a bázis ortonormált, mivel* $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ *páronként merőlegesek egymásra és a hosszuk egy.*

Az egyszerűsítés kedvéért, hogy ne írjuk mindig ki az összeadást, amikor egy vektort $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ segítségével írunk fel, bevezetjük a következő jelölést:

$$\boldsymbol{i} := \mathbf{e_1}, \quad \boldsymbol{j} := \mathbf{e_2}, \quad \boldsymbol{k} := \mathbf{e_3}.$$

Az új jelölésben a kifejtés a következő egyszerű alakot ölti:

$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3) = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + x_3\mathbf{e_3} = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e_i}.$$

2.3. Skaláris szorzat

A skaláris szorzat intuitíven egy művelet, amely két vektorból egy számot képez.

2.9. Definíció. *A skaláris szorzat a háromdimenziós euklideszi téren egy leképezés*

$$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) := |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos(\theta),$$

ahol θ *az* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ *vektorok által bezárt szög, vagyis a vektorok geometriai reprezentációjában értendő egyenesek által bezárt szög. Egyszerűség kedvéért* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ *vektorok skaláris szorzatát* $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$*-vel jelöljük* $\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ *helyett.*

2.10. Tétel. *Legyenek $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 3D euklideszi vektorok és $\boldsymbol{n}$ egy 3D euklideszi vektor, melynek hossza 1. Ebben az esetben a skaláris szorzat a következőket teljesíti:*

1. $-|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$;
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, *ha* $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$;
3. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$;
4. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$;
5. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$;
6. $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$,
7. $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \qquad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0.$

Bizonyítás. 1. A skaláris szorzat definiciója értelmében:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\theta).$$

Mivel $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$, egyértelműen adódik, hogy:

$$-|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|.$$

2. Amennyiben $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, az általuk közrezárt szög $\frac{\pi}{2}$. Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, egyből következik, hogy $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

3. Egyszerű következménye annak, hogy a valós számok szorzása kommutatív.

4. -

5. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}|\cos(0) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \geq 0.$

6. $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{n}|\,|\boldsymbol{n}|\cos(0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

7.
$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{i}|\cos(0) = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}\;1 = 1;$$
$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = |\boldsymbol{j}|\,|\boldsymbol{j}|\cos(0) = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}\;1 = 1;$$
$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{k}|\cos(0) = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\;1 = 1;$$

A többi három egyenlőség egyből következik a tétel második pontjából, mivel $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{i}$.

□

2.4. Kronecker Delta

Mivel az előzőkben láttuk, hogy az $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ egységvektorok skaláris szorzata csak $0,1$ értékeket vehet fel, és előzőleg bevezettük a $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ jelöléseket, bevezetünk egy szimbólumot, amely az egységvektorok skaláris szorzatára való információt kompakt módon összefoglalja. Először átírjuk a fenti tételben megjelenő skaláris szorzatokat az új jelölésben:

$$\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_1}=\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{e_2}=\mathbf{e_3}\cdot\mathbf{e_3}=1,\ \ \mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2}=\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{e_3}=\mathbf{e_3}\cdot\mathbf{e_1}=0.$$

Bevezetve a δ_{ij} Kronecker Delta szimbólumot:

$$\boxed{\mathbf{e_i}\cdot\mathbf{e_j}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{ha } i=j\\ 0 & \text{ha } i\neq j\end{cases}.}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbf{e_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}b_i\mathbf{e_i}\right)=\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_j\mathbf{e_i}\cdot\mathbf{e_j}=\textstyle\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_j\delta_{ij}=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}a_ib_i.}$$

2.5. Diadikus szorzat?

Nem emlékszem pontosan, hol használtuk a diadikus szorzatot elmfizben, de szerintem nem annyira fontos és két vektortér tenzorszorzatának speciális esete, amikor $V=W$, vagyis $V\otimes V$ elemei $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ diadikus szorzat tagok (Wiki dyadics article). Bevezethetjük az absztrakt tárgyalásnál, amikor a vektortereket absztratkan kezeljük.

3. Lineáris algebra

3.1. A kétdimenziós eukleideszi tér

Emlékezzünk vissza, hogy a valós számokból rendezett párokat alkothatunk a descartes-i szorzat által.

3.1. Definíció. *Legyen X_1,X_2 két halmaz. A két halmaz Descartes szorzata egy újabb halmaz $X_1\times X_2$, amelynek elemei rendezett számpárok:*

$$X_1\times X_2:=\{(x_1,x_2)|x_1\in X_1,x_2\in X_2\}.$$

Következésképpen, amennyiben $X_1=X_2=\mathbb{R}$, azt kapjuk, hogy $\mathbb{R}^2:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x_1,x_2)|x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$. Tehát $\mathbb{R}^2$ elemei rendezett számpárok. A valós számokon értelmezve van az összeadás és a szorzás. Felmerül a kérdés, hogy $\mathbb{R}^2$ is kap-e valamit ebből a struktúrából. Próbáljuk meg úgy definiálni az összeadást és szorzást $\mathbb{R}^2$-en, hogy használjuk fel a valós számokról a műveleteket. Mivel számpárokról beszélünk, ahol mindkét szám valós, az összeadást definiáljuk tagonként. Konkrétan:

3.2. Definíció. *Legyen* $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. *Ekkor* (x_1,y_1) *és* (x_2,y_2) *összege a következő számpár:*

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2,y_1+y_2).$$

3.3. Példa. *Legyen a két számpáros* $(1,5),(3,3)$. *Ekkor az összegük:*

$$(1,5)+(3,3) = (1+3,5+3) = (4,8).$$

Észrevehetjük azt is, hogy:

$$(3,3)+(1,5) = (3+1,3+5) = (4,8).$$

Mint látjuk, érdekesség képpen ugyanazt az eredményt kapjuk, attól függetlenül, hogy milyen sorrendben adtuk össze a két számot. Véletlenszerű-e ez? Vagy talán van egy struktúra, amely ezt mindig biztosítja?

3.4. Megjegyzés. *Az összeadás művelete* $\mathbb{R}^2$*-en kommutatív. Ez abból következik, hogy a valós számok összeadása kommutatív, vagyis felcserélhető. A kijelentést egyszerű belátni: legyen* $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. *Ekkor:*

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1,x_2+y_2);$$

$$(y_1,y_2)+(x_1,x_2) = (y_1+x_1,y_2+x_2).$$

De mivel x_1,y_1 *valós számok, az összegük felcserélhető, vagyis:*

$$x_1+y_1 = y_1+x_1.$$

Hasonlóan: x_2,y_2 *valós számok, emiatt:*

$$x_2+y_2 = y_2+x_2.$$

Következésképpen:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1,x_2+y_2) = (y_1+x_1,y_2+x_2) = (y_1,y_2)+(x_1,x_2).$$

Az összeadáshoz hasonlóan, egy szorzás műveletet is értelmezünk, tagonként. Ezt a műveletet skalárral való szórzásnak nevezzük.

3.5. Definíció. *Legyen* $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ *egy számpár és* $\lambda \in \mathbb{R}$ *egy valós szám. Ekkor* (x_1,x_2)*-nek a* λ *skalárral való szorzása a következő számpár:*

$$(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2).$$

Tehát eddig van egy halmazunk, amelyen két művelet értelmezett. Ezek a műveletek eleget tesznek a vektortér axiómáknak. Emiatt a $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ struktúra egy vektorteret alkot. Ennek a struktúrának az elemeit két dimenziós eukleideszi vektoroknak nevezzük. Mostantól egy két dimenziós eukleideszi vektort a következő képpen fogunk jelölni:

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2).$$

Tegyük be a vektortér axiómak geometriai jelentését/ábrázolását. Ezáltal vezessük be. Vegyük észre, hogy felírhatjuk a következőt:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1 \cdot (1, 0) + x_2 \cdot (0, 1).$$

3.6. Definíció. *Legyen $c, d \in \mathbb{R}$ valós szám és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ két dimenziós eukleideszi vektor. Ekkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineáris kombinációjának nevezzük a következő két dimenziós eukleideszi vektort:*

$$(cx_1 + dy_1, cx_2 + dy_2) = c(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = c\mathbf{x} + d\mathbf{y}.$$

3.7. Példa. *A lineáris kombinációnak sok sajátos esete van, amelyet jól ismerünk:*

1. $1 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{y}$- *összeadás;*
2. $1 \cdot \mathbf{x} - 1 \cdot \mathbf{y}$- *kivonás;*
3. $0 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$- *null vektor;*
4. $c \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{y} = c \cdot \mathbf{x}$- *skálázás*

Úgy a lineáris kombináció, mint a fenti négy sajátos esete is ábrázolható geometriailag. Ábra: Gilbert Strang MIT kurzusából tehetnénk ábrákat ide.

Következő munka: bevezetni bázist, vektor koordináta reprezentációját, transzformációk. Mátrix és lineáris függvény közötti különbség.

4. Absztrakt vektorterek

Az előző fejezetben az eukleideszi térben való vektorok tulajdonságai tanulmányozása után, észrevettük, hogy adott műveletekre nézve specifikus tulajdonságokat teljesítenek. Ebben a fejezetben a célunk a vektortér általános fogalmának bevezetése, illetve a vektortér struktúrát megőrző leképezések tanulmányozása. Az absztrakt vektorok, vektorterek fizikában több helyen is megjelennek:

1. klasszikus mechanikában: helyzetvektor, sebesség, gyorsulás;
2. Fourier analízisben: $L^2(0, 2\pi)$ - differenciálegyenletek előadáson tanultuk, hogy $\sin(mx)$ és $\cos(mx)$ egy bázist alkotnak ezen a téren;

3. elektromágnességben: a Maxwell egyenletek időben változó vektormezőket írnak le: $\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{B}(t)$ - pontosabban, a tér minden pontjában egy adott időpillanatban két vektor van megadva, amely leírja az elektromos és mágneses mezőt;

4. kvantummechanikában: $L^2(R^3, dx)$- avagy a négyzetesen integrálható függvények tere - ezek a hullámfüggvények;

5. általános relativitáselmélet: téridőhőz kötött érintőterek.

Mint láthatjuk, vektorterek használva vannak úgy a klasszikus fizikában, mint a kvantummechanikában is, tehát a természetet leíró matematikában lényeges szerepet játszanak.

4.1. Megjegyzés. *Az általános relativitáselméletben a téridőnek nincs lineáris struktúrája. Ez könnyen belátható abból, hogy nem tudunk skalárral való szorzást és összeadást definiálni a téridőn. A következő kérdések ezt egyértelműen illusztrálják:*

1. *"Merre van 5× Párizs?";*

2. *"Merre van Párizs + Kolozsvár?".*

Mint láthatjuk, a fenti kérdéseknek nincs sok fizikai értelme, emiatt a relativisztikus téridőre nem húzhatunk lineáris struktúrát.

4.1. Vektorterek

Amielőtt vektortereket definálnánk, két matematikai struktúrára van szükségünk: csoport, test. A csoportok fontos szerepet játszanak a fizikában, mivel rendszerek szimmetriáihoz köthetők. Továbbá, amennyiben egy Lagrange-függvény invariáns, nem változik egy folytonos szimmetriacsoport hatására nézve, a szimmetriacsoporthoz tartozik egy megmaradó fizikai mennyiség. Az energia, implzus megmaradásának a tétele modern nyelvezetben az időbeli és térbeli való transzlációs szimmetria következménye, míg az impulzusnyomaték megmaradásának elve a forgásinvarianciához köthető. Ugyanakkor nem csak téridő szimmetriák vannak, hanem belső mértékszimmetriák is, amelyekhez hasonló módon tartoznak megmaradó mennyiségek, mint például az izospin. Mottóként kijelenthetjük: "A számok mennyiségeket mérnek, a csoportok szimmetriákat".

4.2. Definíció. *Legyen G egy nemüres halmaz és $\cdot$ egy függvény, amely a halmaz két elemét egy másik elemébe képezi (**zártság**):*

$$\cdot : G \times G \to G \,,$$
$$(a,b) \to a \cdot b \,.$$

*ol $a,b \in G$. A $(G,\cdot)$ párost **csoportnak** nevezzük, ha a következő axiómák teljesülnek:*

1. ***Bal identikus elem létezése**: $\exists\ e \in G\, \forall\ g \in G$:*

$$e \cdot g = g \,,$$

*ahol e-t a csoport **bal identikus elemének** nevezzük;*

2. **Bal inverz létezése**: $\forall\ g \in G$, $\exists a' \in G$:

$$a' \cdot g = e \ ;$$

ahol a'-t g **bal inverzének** *nevezzük;*

3. **Asszociativitás**: $\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G$:

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \ .$$

Amennyiben minden $a, b \in G$-re teljesül, hogy $a \cdot b = b \cdot a$, a $(G, \cdot)$ csoportot Abel vagy kommutatív. csoportnak nevezzük.

Ide be lehetne tenni feladatokat: pl. Igazoljuk, hogy:

1. az inverz inverze az önmaga, vagyis $(g^{-1})^{-1} = g$.
2. Ha létezik bal inverz és bal egység elem, akkor létezik jobb inverz és jobb egység elem is, s egyenlőek a bal oldaliakkal.
3. Egy csoport identikus eleme, inverz elem egyértelmű.
4. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

4.3. Megjegyzés. *A fenti struktúrát általában diszkrét csoportnak nevezzük. Léteznek Lie-csoportok is, amelyeket formálisan sokaságként definálunk az algebrai struktúra mellett, ahol a csoportban levő műveletek végtelenül sokszor differenciálhatók. Ebben az előadásban, gondolhatunk a folytonos/Lie csoportokra, mint olyan csoportokra, amelyeket paraméterezni lehet folytonos, vagy végtelenül differenciálható módon.*

4.4. Példa. *A valós számok az összeadásra nézve csoportot alkotnak, sőt Abel-csoportot. Viszont a szorzásra nézve nem, mivel nullának nincs inverze.*

4.5. Példa. **Általános lineáris csoport**(*General linear group): $GL(n, \mathbb{C})$- az $n \times n$-es invertálható mátrixok halmaza a mátrix szorzásra nézve. Ez a csoport nem kommutatív $n = 2$ esetén. Egyszerűen belátható, mivel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertálható mátrixok, determinánsuk $-1 \neq 0$. Viszont nem kommutálnak, ami egyszerűen belátható:*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ez a példa kivételesen érdekes, mivel az ortogonális és unitér csoportok, amelyeket fizikában *sokszor használunk részcsoportjai $GL(n,\mathbb{C})-nek$.*

4.6. Példa. **Ortogonális csoport** $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | A^\intercal A = AA^\intercal = \mathbb{I}_n\}$. *Egyértelműen beláthatjuk:*

$$\det\left(A^T A\right) = \det(\mathbb{I}_n) \implies \det\left(A^T A\right) = \det\left(A^T\right)\det(A) = \det(A)^2 = 1 \implies \det(A) = \pm 1.$$

Az alcsoportot, ahol $\det(A) = 1$ **speciális ortogonális csoport**-nak nevezzük:

$$SO(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | A^\intercal A = AA^\intercal = \mathbb{I}_n, \det(A) = 1\}.$$

Ez ugyan nem más, mint a jól ismert forgás csoport! A konkrét kapcsolatot és a csoport paraméterezését a következő tétel adja.

4.7. Tétel. $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R}) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Bizonyítás. Kezdjük $SO(2)$ definíciójával:

$$SO(2) = \{A \in GL(2,\mathbb{R}) | A^\intercal A = \mathbb{I}_2, \det(A) = 1\}.$$

Vegyünk egy konkrét mátrixot $GL(2,\{R\})$-ből és alkalmazzuk rá a feltételeket:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^\intercal = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \implies A^\intercal A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ba+dc & b^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Mivel$a,b,c,d \in \mathbb{R}$, felhasználva a kommutativitást $ab+cd = ba+dc$ kapjuk, hogy:

$$A^\intercal A = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Most számoljuk ki $\det(A)$-t:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

A két feltételt $A^\intercal A = \mathbb{I}_2$,$\det(A) = 1$ felhasználva:

$$\det(A) = 1 \implies ad - bc = 1, \; A^\intercal A = \mathbb{I}_2 \implies \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát négy feltételt kaptunk az a,b,c,d valós számokra:

$$a^2 + c^2 = 1; \tag{2}$$

$$b^2 + d^2 = 1; \tag{3}$$

$$ad - bc = 1; \tag{4}$$

$$ab + cd = 0. \tag{5}$$

A (16), (17) egyenletek azt mutatják, hogy $(a,c),(b,d)$ egy egység sugarú körön vannak, tehát parametrizálhatjuk őket a következő képpen:

$$a = \cos\alpha, \quad c = \sin\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad d = \sin\beta, \text{ ahol } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Bepakolva (18),(19)-be:

$$\cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\cos\alpha = 1, \quad \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0. \tag{6}$$

Felhasználva a trigonometrikus összefüggéseket (20)-t átírhatjuk, mint:

$$\sin(\beta - \alpha) = 1, \quad \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Ebből egyértelműen következik, hogy:$\beta - \alpha \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Tehát:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} + \alpha\right) \\ \sin\alpha & \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} + \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mivel $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, átnevezhetjük $\alpha \to \alpha' = -\alpha$. A cos függvény páros, míg sin függvény páratlan, amiből következik:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha') & -\sin(-\alpha') \\ \sin(-\alpha') & \cos(-\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -(-)\sin\alpha' \\ -\sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & \sin\alpha' \\ -\sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix}, \ \alpha' \in \mathbb{R}.$$

□

4.8. Megjegyzés. *Ahogy említettük feljebb is, a forgáscsoporttal szemben való invariancia egy megmaradási tételhez vezet: impulzusnyomaték megmaradása.*

Amennyiben belefér, nem túl sok, betehetném még példának az unitér csoportokat, és SU(2)-re hasonlóan a paraméterezést (vagy ez lehet akár feladat is). SU(2) után meg lehetne említeni, hogy SU(2) SU(3) és U(1) a standard modell mértékcsoportjai, és hozzájuk tartozó megmaradó mennyiségek vannak, ez lenne a motiváció ennek a tanulmányozására.

4.9. Definíció. *Egy $(F,+,\cdot)$ hármast testnek nevezünk, ahol F egy halmaz, $+,\cdot : F \times F \to F$ leképezések és kielégítik az alábbi axiómákat:*

1. $(F,+)$ *Abel-csoport;*
2. $(F \setminus \{0\},\cdot)$ *Abel-csoport;*
3. $\forall a,b,c \in F : a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

4.10. Példa. *A legegyszerűbb példa a* $\{0,1\}$ *halmaz, összeadásra és szorzásra nézve. Ezt* $\mathbb{Z}_2$*-nek nevezzük.*

4.11. Példa. $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

4.12. Példa. $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Ebben a jegyzetben legtöbbször csak a valós számokat fogjuk testként venni, de megemlítettük a test fogalmát, mivel például a kvantummechanikában a komplex test fölötti vektortereket használunk, így érdemes tetszőleges test feletti vektorterekről tudni. Tehát mostantól, legtöbb esetben $F=\mathbb{R}$.

Feladat 4.1

1. A háromdimenziós térre igazoljuk, hogy:

   (a)
   $$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2\end{vmatrix}$$

   (b)
   $$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}\geq 0$$

   Útmutatás: Használjuk fel a vegyes szorzat determináns alakját illetve azt, hogy $\det(A^\top)=\det(A)$ és $\det(A\cdot B)=\det(A)\det(B)$.

2. Ha áttérünk a négydimenziós euklideszi térre, akkor belátható, hogy létezik legtöbb négy lineárisan független vektor. Amint a háromdimenziós térben két vektorhoz a vektoriális szorzat révén egy újabb vektort rendelhetünk, hasonlóan most a négydimenziós térben három vektorhoz $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ egy új vektort rendelünk az alábbi módon :

   $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}$$

   Igazoljuk, hogy:

   (a)
   $$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}$$

(b) Az alábbi „vegyes szorzat” esetén

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{d} \equiv (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$$

fennáll az, hogy

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

(c) ... és az, hogy

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})|^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix} \geq 0$$

4.2. Vektorok mátrixreprezentációja

Az L lineáris térben válasszunk egy $\boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1,n}$ bázist.

Bármely $\boldsymbol{x}$ vektort a térben felírhatjuk mint a bázisvektorok lineáris kombinációi:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i \ , \quad x_i \text{ az } \boldsymbol{x} \text{ vektor } \textit{komponensei}$$

Az adott bázis esetén írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Belátható, hogy

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Vektorok mátrix reprezentációja: oszlopmátrix

4.2.1. Lineáris operátorok mátrix reprezentációja

Legyen L egy n dimenziós lineáris tér, ennek bázisa $\boldsymbol{e}_i$, $\quad i = \overline{1,n}$.

Legyen $\hat{\boldsymbol{O}} : L \to L$ operátor, azaz vektorból vektorba történő leképezés:

$$\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{x})$$

Lineáris operátor $\hat{\boldsymbol{O}}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\hat{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{x}) + \beta\hat{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{y})$, ahol $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$

Az operátorok egymás utáni alkalmazását ezek szorzataként tekintem, azaz $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{O}}_1(\boldsymbol{x})$ és $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{O}}_2(\boldsymbol{y})$, akkor $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{O}}_2\left(\hat{\boldsymbol{O}}_1(\boldsymbol{x})\right) \equiv \hat{\boldsymbol{O}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{O}}_1(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{O}}_{12}(\boldsymbol{x})$

1. Tehát $\hat{\boldsymbol{O}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{O}}_1 = \hat{\boldsymbol{O}}_{12} : L \to L$ maga is lineáris operátor (zártság).
2. Fennáll az asszociativitás is
3. Létezik semleges elem is.
4. Hasonlóképpen értelmezhető az operátorok összeadása is.

Következésképpen a négyzetes mátrixokhoz hasonlóan egy *(asszociatív) algebrát* alkotnak (lineáris tér + bilineáris szorzási művelet).

Egy $\boldsymbol{x}$ vektort az adott bázisban az x_i összetevőkkel/koordinátákkal jellemezzük.
$\hat{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{f}_i = \sum_j (f_i)_j \boldsymbol{e}_j$, melynek koordinátái $(f_i)_j \equiv O_{ji}$, azaz $\hat{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{e}_i) = \sum_j O_{ji}\boldsymbol{e}_j$.
Ha $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{x})$, akkor $\sum_j y_j \boldsymbol{e}_j = \hat{\boldsymbol{O}}(\sum_i x_i \boldsymbol{e}_i) = \sum_i x_i \hat{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i,j} x_i O_{ji} \boldsymbol{e}_j$.

$$y_j = \sum_i O_{ji} x_i$$

Mátrix reprezentáció összefoglaló

1. Vektorok $\to$ oszlop mátrix
2. Lineáris operátorok $\to$ négyzetes mátrix
3. Lin. operátorok összetevése $\to$ az elemi operátorok mátrixainak szorzata
4. Operátor által transzformált vektor $\to$ operátor mátrixának és vektor oszlopmátrixának szorzata

4.13. Példa. *Két dimenzióban: az $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$ lineárisan független vektorok révén nézzük, hogy hányféleképpen transzformálhatunk két dimenzióban. A szürke terület az $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$, $a_1, a_2 \in [0,1]$ lehetséges vektorok halmazát jelöli.*

1. **nyújtás**: *2 paraméter*

$$\boldsymbol{S} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

2. **forgatás**: *1 paraméter*

$$\boldsymbol{R} \equiv \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

3. **nyírás**: *1 paraméter*

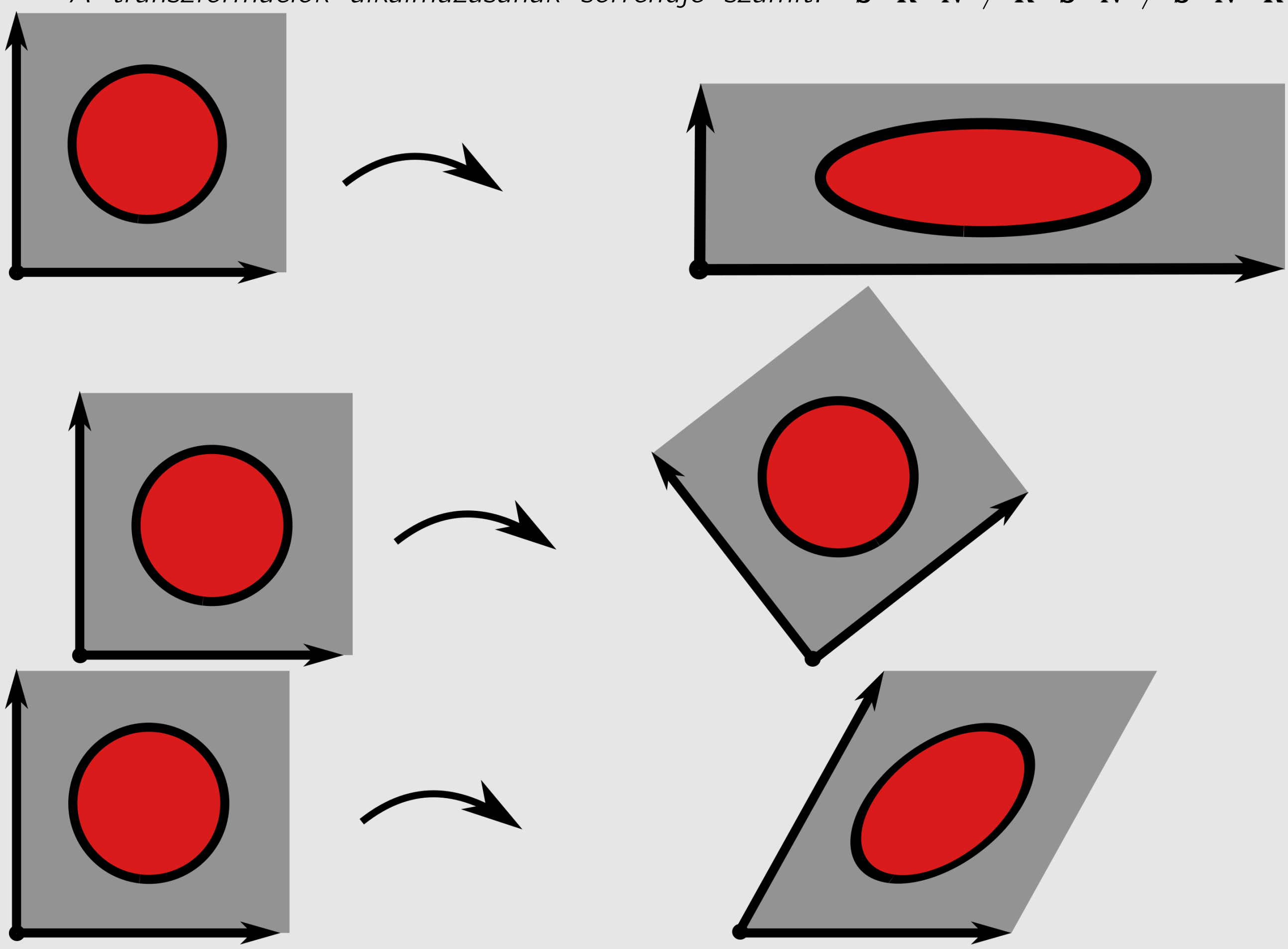
$$\boldsymbol{N} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

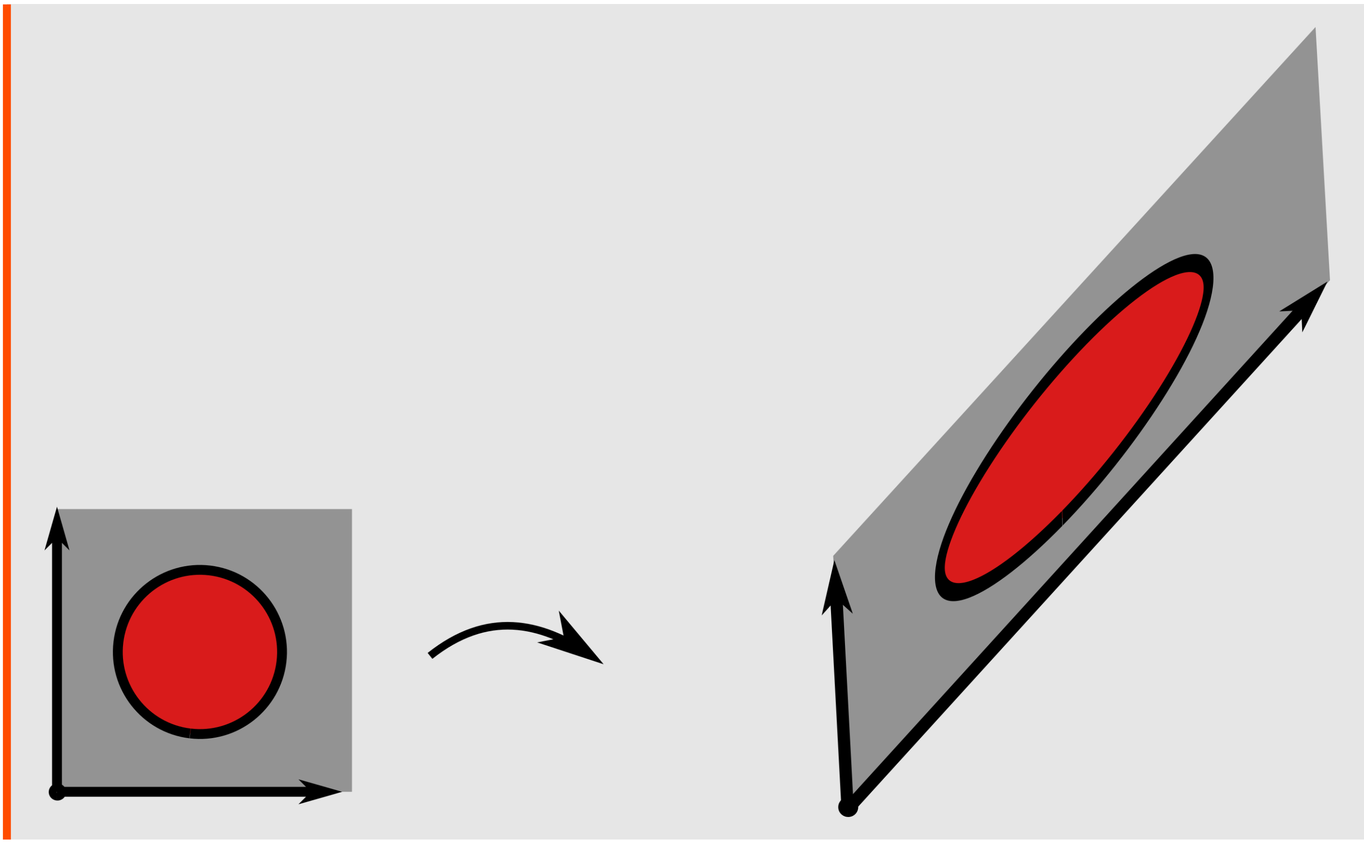
Tetszőleges lineáris transzformáció = a három féle transzformáció valamilyen összetevődése. Például:

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{N}$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \to a, b, c, d$

A transzformációk alkalmazásának sorrendje számít: $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{R}$





4.3. Vektorreprezentáció transzformációja bázisváltás esetén

Az $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ bázisról térjünk át az $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$.

Az új bázisvektorok felírhatók mint a régi bázisvektorok lineáris kombinációja:

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_j (\boldsymbol{e}'_i)_j \boldsymbol{e}_j = \sum_j T_{ji} \boldsymbol{e}_j$$

ahol $(\boldsymbol{e}'_i)_j \equiv T_{ji}$ az $\boldsymbol{e}'_i$ új bázisvektor komponensei a régi bázisban. Egy tetszőleges $\boldsymbol{x}$ vektort felírjuk mindkét bázisban:

$$\boldsymbol{x} = \sum_j x_j \boldsymbol{e}_j = \sum_i x'_i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i,j} x'_i (\boldsymbol{e}'_i)_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{i,j} x'_i T_{ji} \boldsymbol{e}_j$$

$$x_j = \sum_i T_{ji} x'_i \ , \qquad \rightarrow \qquad x'_i = \sum_j T^{-1}_{ij} x_j$$

Összevetve a fentebbi $y_j = \sum_i O_{ji} x_i$ képlettel

T_{ji} bázisváltás $\equiv$ a teljes L vektortér (lineáris) transzformációja $\hat{\boldsymbol{T}}^{-1}$-vel.

4.4. Lineáris operátorok transzformációja

Az L lineáris teren hat egy $\hat{\boldsymbol{O}}$ operátor, ami $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{x}$ módon kapcsol össze bármilyen $\boldsymbol{x} \in L$ vektort valamely másik $\boldsymbol{y} \in L$ vektorral.

A $\hat{\boldsymbol{T}}^{-1}$ lineáris operátorra úgy tekintünk, mint egy olyan transzformációra, melyet a tér minden vektorára alkalmazunk (vagy egy sima bázisváltásként T_{ij} szerint, ahol T_{ij} a $\hat{\boldsymbol{T}}$ mátrix reprezentációja)

Kérdés: miként hozzuk létre azt az $\hat{\boldsymbol{O}}'$ operátort, mely ugyanazokat a $\boldsymbol{x}' = \hat{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{x}$, és $\boldsymbol{y}' = \hat{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{y}$ vektorokat kapcsolja össze, $\boldsymbol{y}' = \hat{\boldsymbol{O}}'\boldsymbol{x}'$ módon, melyeket a transzformációt megelőzően a $\hat{\boldsymbol{O}}$ kapcsolt össze? (vagy mi lesz $\hat{\boldsymbol{O}}$ O'_{ij} mátrix reprezentációja a bázisváltás után)

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}' \ , \quad \boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}'$$

$$\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{x} \ , \quad \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}' = \hat{\boldsymbol{O}}\hat{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}' \quad |\cdot \quad \hat{\boldsymbol{T}}^{-1}(\ldots)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{y}' = \hat{\boldsymbol{T}}^{-1}\hat{\boldsymbol{O}}\hat{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}'$$

4.14. Tétel. *Egy $\hat{\boldsymbol{O}}$ lineáris operátor $\hat{\boldsymbol{T}}^{-1}$ szerinti lineáris transzformáltja*

$$\hat{\boldsymbol{O}}' = \hat{\boldsymbol{T}}^{-1}\hat{\boldsymbol{O}}\hat{\boldsymbol{T}}$$

(vagy $\hat{\boldsymbol{O}}$ operátor mátrix reprezentációja a T_{ij} bázisváltás után

$$O'_{ij} = \sum_{k,l} T^{-1}_{ik} O_{kl} T_{lj} \ . \quad)$$

4.5. Lineáris egyenletrendszerek geometriai értelmezése

4.5.1. Lineáris egyenletek mint vektorvetületek

Két dimenzióban a

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 & = \alpha \ , \\ b_1x_1 + b_2x_2 & = \beta \ . \end{cases}$$

egyenletrendszert a vektorok skalár szorzatának segítségével átírhatjuk

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} & = \alpha \ , \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} & = \beta \ . \end{cases}$$

alakra, ahol az $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ és $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ vektorok, illetve α és β skalárok adottak. Az ismeretlen $\boldsymbol{x}$ vektort annak két vetülete révén akarjuk meghatározni. Belátható, hogy ha $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ párhuzamosak (lineárisan függők), azaz $\boldsymbol{b} = u\boldsymbol{a}$, akkor $\beta = u\alpha$ vagy ellenkező esetben ellentmondó egyenleteink vannak. Előbbi esetben az $\boldsymbol{a}$ tartóegyenesére merőleges irányban nem tudunk semmit az ismeretlen vektorról, ezért nem kapunk egyértelmű megoldást (végtelen sok megoldást kapunk). Ez a helyzet áll fenn a homogén esetben, mikoris $\alpha = \beta = 0$, azaz $\boldsymbol{x}$ merőleges két adott vektorra. Síkban egy egyenesre csak egyetlen másik egyenes lehet merőleges ezért az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ tartóegyenesei egybe kell essenek, szingulárissá téve a belőlük képezett mátrixot.

Három dimenzióban

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} & = \alpha \ , \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} & = \beta \ , \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x} & = \gamma \ . \end{cases}$$

Ha $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ lineárisan függők, létezik u és v úgy, hogy $\boldsymbol{c} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$, másszóval a három vektor egy síkban helyezkedik el, akkor vetületek segítségével nem tudom az ismeretlen $\boldsymbol{x}$ vektort egyértelműen meghatározni. Ha $\gamma = u\alpha + v\beta$, akkor bármely a síkra merőleges vektor megoldás, ellenkező esetben nincs megoldás. Itt is a homogén eset, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, szavatolja az ellentmondás mentességet, és a síkra merőleges irányú, azonos tartóegyenesű vektorok sokaságát kapjuk megoldásként. Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok lineáris függősége, azaz a belőlük képezett mátrix szingularitása, nyilvánvaló követelmény, mert térben nem lehet három független irányra merőleges egyenest szerkeszteni. Ha mindhárom vektor kollineáris (a mátrix rangja egy), akkor ezekre merőleges síkban elhelyezkedő bármely vektor megoldás.

4.5.2. Lineáris egyenletek mint (hiper)síkok

Három dimenzióban egy síkot felírhatunk úgy mint

$$ax + by + cz = d$$

ahol $d/a, d/b$ és d/c a sík metszéspontjai az x, y illetve z tengelyekkel, azaz a, b és c az orientációját d pedig az elhelyezkedését (a koordináta kezdőponttól való eltolást) jellemzi. Két hasonló egyenlet, azon x, y és z koordinátákkal jellemzett pontok halmaza, melyek két síknak egyidőben részei, azaz a két sík metszete, ami általában egy egyenes, szinguláris esetekben üres halmaz (a két sík párhuzamos, de egymáshoz képes eltoltak) vagy egy sík (a két sík egybeesik). Három egyenletből álló rendszer megoldása a megfelelő három sík metszeteként kapott pont koordinátái. Ha az egyik egyenlet bal oldala megegyezik a másik két egyenlet bal oldalainak lineáris kombinációjával az egy olyan síkot jelent, mely párhuzamos az utóbbi kettő metszési vonalával (nincs megoldás) vagy magába foglalja a metszővonalat (végtelen sok megoldás). Hogy melyik esettel állunk szemben a kezdőponttól való elmozdulást jellemző jobb oldali szabad tagtól függ.

Homogén egyenletek esetén mindhárom sík átmegy a kezdőponton. Mint ilyen a kezdőpont triviális megoldás. Ettől eltérő megoldás csak akkor kapható, ha a három síknak van egy közös metszési vonala (az együttható mátrix rangja kettő), vagy a három sík egybeesik (a mátrix rangja egy).

4.6. Sajátértékfeladat

Átlós (diagonális mátrix) = nyújtás (skálázás)

$$\boldsymbol{\Lambda x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \dots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{A}$ négyzetes, $\boldsymbol{b}$ oszlop) csatolt rendszer $\rightarrow$ nehezen megoldható

$\boldsymbol{\Lambda x} = \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{\Lambda}$ átlós, $\boldsymbol{b}$ oszlop) csatolatlan rendszer $\rightarrow$ könnyen megoldható

$\Longrightarrow$ szeretjük a diagonális alakot.

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \quad \dots \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}_n = \lambda_n \boldsymbol{e}_n \ .$$

1. Az átlós mátrix a bázisvektorokra hatva velük párhuzamos vektort hoz létre.
2. Két vektor párhuzamossága (lin. függősége) reprezentációtól független.
3. A mátrix mint egy lineáris operátor reprezentációja a lineáris tér bázisának megválasztásától függ.

$\rightarrow$ Egy másik bázisban a transzformált $\boldsymbol{\Lambda}$ és $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ között is hasonló skálázás nyújtási reláció áll fenn$\rightarrow$ válasszunk jól bázist.

Visszafele indulunk el.

Egy adott $\boldsymbol{A}$ valós operátor (mátrix) esetén keressük azokat a vektorokat, melyekre hatva (azokat szorozva) a vektorral párhuzamos új vektort kapunk. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \quad i = 1, 2, \dots n$ ahol n a lineáris tér dimenziója (a mátrix mérete).

λ_i - az $\boldsymbol{A}$ sajátértékei, $\boldsymbol{x}_i$- az $\boldsymbol{A}$ sajátvektorai

Legyen $\boldsymbol{X}$ az $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ sajátvektorok oszlopmátrix reprezentációjából képezett négyzetes mátrix.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda} \quad |\boldsymbol{X}^{-1}\cdot$

$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$

4.15. Definíció. *Hasonlósági transzformáció*

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

4.16. Tétel. *Hasonlósági transzformáció megtartja a mátrixok sajátértékeit.*

4.17. Bizonítás.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad |\boldsymbol{T}^{-1}\cdot$$

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} \quad |\boldsymbol{T}^{-1}\cdot$$

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' = \lambda\boldsymbol{x}' \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} \quad \square$$

Sajátértékfeladat megoldásának menete:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \rightarrow \quad (\boldsymbol{A} - \lambda\mathbb{I})\boldsymbol{\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

homogén lineáris egyenletrendszer, $\mathbb{I}$ az $n \times n$-es egységmátrix.

1. Triviális megoldása az $\boldsymbol{x} = 0$.

2. Ha van nemtriviális megoldása, akkor automatikusan végtelen sok van, mert egy szorzó erejéig határozható meg, azaz ha $\boldsymbol{x}$ megoldás, akkor $\alpha\boldsymbol{x}$ is megoldás $\forall\alpha \neq 0$.

3. Olyan α szorzót használunk, mely megfelel. Például $\boldsymbol{x}$ együtthatói egyszerű alakot öltenek (egész számok) vagy a vektor normált lesz: $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 1$

A nemtriviális megoldás létezésének szükséges feltétele az $\boldsymbol{A}$ mátrix szingularitása.

4.18. Definíció. *$\boldsymbol{A}$ mátrix szinguláris, ha...*

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\ ,$$

λ-ban egy n-ed fokú egyenlet.

A fenti egyenlet minden egyes λ_i gyökére megoldjuk a homogén egyenletrendszert.

4.6.1. Elfajult sajátértékek esete

Az

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

egyenlet megoldása felfogható mint azon (al)terek meghatározása melyeket az $\boldsymbol{A}$ transzformáció önmagukra képez le, azaz a benne levő vektorokat nyújtja, zsúgorítja, tükrözi, 2D fölött forgatja is, de nem lépteti ki őket az altérből. Ezek az (al)terek az $\boldsymbol{A}$ transzformáció *saját terei*. A mátrix sajátvektorai az egyes (al)terek bázisai. Elfajult sajátérték alatt a

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet többszörös megoldásait értjük. Ilyenkor egyetlen λ sajátértékhez nem egyetlen sajátvektor, azaz egyetlen bázisvektor, azaz egydimenziós sajáttér tartozik, hanem annyi ahányszoros gyök. Ha például λ kétszeres gyök, akkor a hozzá tartozó alteret két lineárisan független sajátvektor feszíti ki.

Példa:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sajátértékei 4, 2 és 2. $\lambda = 4$-re az

$$(\boldsymbol{A} - 4\mathbb{I})\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

egyenletet kapjuk. A második egyenletéből $x_2 = 0$, míg a másik kettőből $x_1 = x_3$. Tehát $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 1)$.

A fentiekben úgy is gondolkozhattunk, hogy a saját vektorokból építhető tér, tehát az azt alkotó vektorokat felírhatjuk úgy mint:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Figyelembe véve a kapott $x_2 = 0$ és $x_1 = x_3$ összefüggéseket, a fentiek

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tehát a $\lambda = 4$-hez rendelhető sajáttér egyik lehetséges bázisa az (1, 0, 1) komponensekkel rendelkező vektor.

$\lambda = 2$ esetében a

$$(\boldsymbol{A} - 2\mathbb{I})\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, mely annyit mond, hogy $x_1 = -x_2 - x_3$. Tehát

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -(x_2 + x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

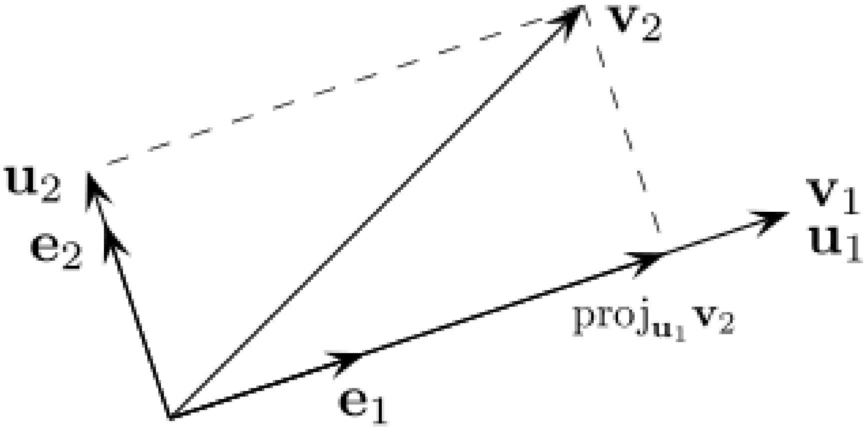
Tehát a $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajáttér a (-1, 1, 0) és (-1, 0, 1) vektorok tetszőleges lineáris kombinációja. Bármilyen vektor ebből a sajáttérből benne marad a sajáttérben az $\boldsymbol{A}$-val való szorzást követően is. Ez utóbbi két vektor tehát sajátvektorai az $\boldsymbol{A}$ mátrixnak. De az általuk kifeszített térben bármelyik másik két lineárisan független vektor is megteszi. Például

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lineáris kombinációk is használhatók sajátvektorokként.

4.7. Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}$$



$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_1}(\boldsymbol{v}_2), \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_1}(\boldsymbol{v}_3) - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_2}(\boldsymbol{v}_3), \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_1}(\boldsymbol{v}_4) - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_2}(\boldsymbol{v}_4) - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_3}(\boldsymbol{v}_4), \qquad \boldsymbol{e}_4 = \frac{\boldsymbol{u}_4}{\|\boldsymbol{u}_4\|} \tag{10}$$

$$\vdots \qquad \vdots \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_j}(\boldsymbol{v}_k), \qquad \boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}. \tag{12}$$

4.19. Példa. *Ortogonalizáljuk az $1, x, x^2$ függvényrendszert az*

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x$$

skaláris szorzatra nézve.

$$\mathrm{proj}_1(x) = \frac{(1,x)}{\|1\|^2}\cdot 1 = 0\ , \quad \mathrm{proj}_1(x^2) = \frac{(1,x^2)}{\|1\|^2}\cdot 1 = \frac{1}{3}\ , \quad \mathrm{proj}_x(x^2) = \frac{(x,x^2)}{\|x\|^2}\cdot x = 0\ .$$

$$u_1 = 1\ , \qquad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

$$u_2 = x - \mathrm{proj}_1(x) = x\ , \qquad e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x \tag{14}$$

$$u_3 = x^2 - \mathrm{proj}_1(x^2) - \mathrm{proj}_x(x^2) = x^2 - \frac{1}{3}\ , \qquad e_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{3x^2-1}{2} \tag{15}$$

5. Tenzorok

A tenzorok a skalárok és vektorok általánosításaképp fogható fel. Egy n-ed rendű tenzor egy olyan objektum, melynek a megadásához tetszőleges koordináta rendszerben 3^n számra van szükségünk. Így a vektorok elsőrendű tenzorok, melyeket $3^1 = 3$ komponensel adhatunk meg, míg a skalárok nulladrendű tenzorok, $3^0 = 1$ komponensel.
Tenzor = multilineáris leképezése vektoroknak számokra Első rendű tenzor:

$$\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_1 : V \to \mathbb{R} \ , \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \ , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{T}(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + \beta \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})$$

Másodrendű tenzor:

$$\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_2 : V \times V \to \mathbb{R} \ , \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{T}(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) = \alpha \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

n. rendű tenzor:

$$\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_n : V^n \to \mathbb{R} \ , \quad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y} \in V \ , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \alpha \boldsymbol{x}_i + \beta \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \alpha \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_n) + \\ + \beta \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \end{aligned}$$

Példa

- $$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{a}) \equiv a_x \ , \qquad \text{vetítés az } Ox \text{ tengelyre}$$

- $$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}) \equiv \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{q} \ , \qquad \text{skaláris szorzat valamely rögzített vektorral}$$

- $$\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \equiv a_x (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{q}) c_y \ .$$

- $$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{b}, \qquad \text{lineáris operátor + skalár szorzat}$$

5.1. Tenzorok reprezentációja

- Legyen $\boldsymbol{e}_i$ bázis a V-n, $\boldsymbol{T}$ elsőrendű tenzor.

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(x_i \boldsymbol{e}_i) = x_i \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i) = x_i t_i \ , \quad \text{ahol} \quad t_i \equiv \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)$$

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)$ szükséges és elégséges, hogy a $\boldsymbol{T}$ tenzornak bármely vektorral való kapcsolatát leírjuk.

Mint ilyen t_i egyenértékű a tenzorral magával.

- Hasonlóképpen, ha $\boldsymbol{T}$ másodrendű tenzor, akkor $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_i y_j T_{ij} \ , \quad \text{ahol} \quad T_{ij} \equiv \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$$

- Ha $\boldsymbol{T}$ n. rendű tenzor, akkor $\forall \boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x}_n \in V$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n) = x_{1i_1} x_{2i_2} \cdots x_{ni_n} T_{i_1 i_2 \cdots i_n} \ ,$$

$$\text{ahol} \quad T_{i_1 i_2 \cdots i_n} \equiv \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots \boldsymbol{e}_{i_n})$$

5.2. Tenzorok lineáris transzformációja

Adott $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,$ bázisról áttérünk az $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\ldots,$ bázisra egy $\hat{\boldsymbol{O}}$ transzformációval, melynek lineáris reprezentációja O_{im}

$$\boldsymbol{e}'_i = O_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

A $\boldsymbol{T}$ n. rendű tenzor reprezentációja az új bázisban

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}'_{i_1},\boldsymbol{e}'_{i_2},\ldots,\boldsymbol{e}'_{i_n}) = O_{i_1 j_1} O_{i_2 j_2} \ldots O_{i_n j_n} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n})$$

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = O_{i_1 j_1} O_{i_2 j_2} \ldots O_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

Másodrendű tenzor esetén:

$$T'_{ij} = O_{im} O_{jn} T_{mn} = O_{im} T_{mn} O_{jn} = O_{im} T_{mn} O^{\top}_{nj}$$

Mátrix reprezentáció használatával:

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{O}\boldsymbol{T}\boldsymbol{O}^{\top}$$

5.3. Tenzorok külső (tenzori) szorzata

Ha $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_n$, $\boldsymbol{U} \in \mathcal{T}_m$, akkor értelmezett az

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{U} \in \mathcal{T}_{n+m}$$

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m)$$

$$W_{i_1 i_2 \cdots i_n j_1 j_2 \cdots j_m} = T_{i_1 i_2 \cdots i_n} U_{j_1 j_2 \cdots j_m}$$

5.4. Tenzorok kontrakciója

5.1. Definíció.

1. **Kontrakció**: *a tenzor rendjének csökkentése indexek párosával történő összevonásával*
2. **Indexek összevonása**: *két szabad index összegzési indexé alakítása azonossá tétel és összegzés által*
3. **Einstein-féle összegzési konvenció**: *Tenzorindexek összevonásakor az összegzés magától értetődése miatt a $\sum$ jel elhagyható*

5.2. Példa.

1. $u_{ij}v_{kl} \quad \rightarrow \quad w_{il} = \sum_j u_{ij}v_{jl} = u_{ij}v_{jl}$ *(másodrendű)*
2. $u_{ij}v_{kl} \quad \rightarrow \quad w_{ik} = \sum_j u_{ij}v_{kj} = u_{ij}v_{kj}$ *(másodrendű)*
3. $u_{ij}v_{kl} \quad \rightarrow \quad w_{kl} = \sum_i u_{ii}v_{kj} = u_{ii}v_{kj}$ *(másodrendű)*
4. $\sum_i t_i v_i = t_i v_i = a$ *(nulladrendű)*
5. $\sum_i t_{ij} v_i = t_{ij} v_i = a_i$ *(elsőrendű)*
6. $\sum_{ijk} t_{imj} u_{pj} v_{kki} = t_{imj} u_{pj} v_{kki} = a_{mp}$ *(másodrendű)*

5.4.1. Indoklás

Két elem használatával:

1. **Résztenzorok használata**

   $\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \cdot, \cdot)$ 2. rendű tenzor 3. rendűből rögzített $\boldsymbol{x}$ vektor segítségével.

   $X_{ij} = \boldsymbol{T}(x_k \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = x_k T_{kij}$

2. **Vektorkomponensek tenzorból való előállítása** A fenti X_{ij} számokból létrehozhatunk egy sor vektort

   $$\boldsymbol{x}_i = \sum_j X_{ij} \boldsymbol{e}_j$$

   Ezekre való hatása egy elsőrendű $\boldsymbol{U}$ tenzornak

   $$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_i) = X_{ij} u_j = x_k T_{kij} u_j$$

5.3. Definíció.

1. *Az s_{ij} másodrendű tenzor szimmetrikus, ha $s_{ij} = s_{ji}$ (indexei felcserélhetők)*
2. *Az a_{ij} másodrendű tenzor antiszimmetrikus, ha $a_{ij} = -a_{ji}$ (felcseréléskor előjelet vált)*

3. *Az* $S_{i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n}$ *n-ed rendű tenzor szimmetrikus* i_α *és* i_β *felcserélésével szemben, ha* $S_{i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n} = S_{i_1 i_2 \ldots i_\beta \ldots i_\alpha \ldots i_n}$
4. *Az* $A_{i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n}$ *n-edrendű tenzor antiszimmetrikus* i_α *és* i_β *felcserélésével szemben, ha* $A_{i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n} = -A_{i_1 i_2 \ldots i_\beta \ldots i_\alpha \ldots i_n}$
5. *Egy harmad- vagy magasabbrendű tenzor teljesen (anti)szimmetrikus, ha bármely két indexének felcserélésével szemben (anti)szimmetrikus.*
6. *Egy páratlan rendű tenzor tükrözés során előjelet vált.*
7. *Egy páros rendű tenzor tükrözés során nem vált előjelet.*
8. *Ha egy páros (páratlan) rendű tenzor tükrözés során előjelet (nem) vált, akkor az egy ún. pszeudotenzor.*

5.4. Példa.

- $\boldsymbol{Pa} = -\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{Pb} = -\boldsymbol{b} \to$ *vektorok, Pl.:* $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{F}$
- $s = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{Pa}) \cdot (\boldsymbol{Pb}) = s \to$ *skalár, Pl.:* E, m, T, ρ
- $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{Pa}) \times (\boldsymbol{Pb}) = \boldsymbol{c} \to$ *pszeudovektor, Pl.:* $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
- $s_p = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{Pa}) \cdot [(\boldsymbol{Pa}) \times (\boldsymbol{Pb})] = -s_p \to$ *pszeudoskalár, Pl.:* $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{v}$

Szabály: Ha egy szorzatban a pszeudo mennyiségek számának és vektori szorzatok számának összege páratlan, akkor a kifejezés egy pszeudo mennyiség. Ellenkező esetben nem.

5.5. Példa. *Jelölés:* s *- skalár,* $\boldsymbol{v}$ *- vektor,* p *- pszeudoskalár,* $\boldsymbol{p}$ *- pszeudovektor*

$$
\begin{aligned}
s \cdot s &\to s & \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p} &\to p \\
s \cdot \boldsymbol{v} &\to \boldsymbol{v} & \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} &\to s \\
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} &\to s & \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} &\to \boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} &\to \boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} &\to \boldsymbol{p} \\
s \cdot \boldsymbol{p} &\to \boldsymbol{p} & \boldsymbol{p}\,[\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{p} \times (s\boldsymbol{v}))] &\to \boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

Tételek:

1. Két azonos tulajdonságokkal (rend és szimmetria) rendelkező tenzor lineáris kombinációja is örökli ezeket a tulajdonságokat.

2. $a_{ii} = 0$

3. $a_{ij}s_{ij} = 0$

4. $t_{ij} = t^s_{ij} + t^a_{ij}$

5. $t_{ik}a_{kj} = t^a_{ik}a_{kj}$

6. $t_{ik}s_{kj} = t^s_{ik}s_{kj}$

Bizonyítás $t_{ij} = \dfrac{t_{ij}+t_{ji}}{2} + \dfrac{t_{ij}-t_{ji}}{2}$

5.6. Anyag. 5.5. A háromdimenziós másodrendű tenzorok

5.5.1. A vectorok direkt szorzata és a projekciós operátor

Az $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ortonormált $(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij})$ descartes-féle bázisu háromdimenziós euklideszi térben adottak az

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{e}_j$$

vektorok. A vektorok direkt (diadikus) szorzata

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} := a_ib_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

A vektorkomponenseket mátrix formában is elrendezhetjük felhasználva a vektorkomponensek sor (bra) és oszlop (ket) mátrix alakzatban való felírását.

$$|a)(b| \quad \leftrightarrow \quad \| a_ib_j \| \quad = \quad \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

A direkt szorzatot szorozva skalárisan egy ujabb vektorral

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \quad = \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \quad \leftrightarrow \quad |a)(b|c) \qquad \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) \quad = \quad (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \quad \leftrightarrow \quad (c|a)(b|$$

amiből következik, hogy

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}) \quad = \quad (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{d} \quad \leftrightarrow \quad |a)(b||c)(d| \quad = \quad (b|c)|a)(d|$$

Legyen $\boldsymbol{n}$ egy egységvektor és vezessük be a $P_{\|}(\boldsymbol{n})$ u.n.projekciós operátort a következő képpen:

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}) = 1 \qquad \mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}) \quad = \quad \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$$

melynek az elözőek alapján a következő tulajdonsága van:

$$(\mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}))^2 = \mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}) \qquad \mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{a} \quad = \quad (\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{a} \quad = \quad \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})$$

Tehát megadja az $\boldsymbol{a}$-nak az $\boldsymbol{n}$ irányába eső összetevöjét. Vezeessünk be egy másik merőleges projekciós operátort is a következő képpen:

$$\mathcal{P}_{\perp}(\boldsymbol{n}) = \mathbb{I} - \mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}) \qquad \mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n})\mathcal{P}_{\perp}(\boldsymbol{n}) = 0 \qquad (\mathcal{P}_{\perp}(\boldsymbol{n}))^2 = \mathcal{P}_{\perp}(\boldsymbol{n})$$

Két meröleges irány esetén:

$$\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}_1)\mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}_2) \quad = \quad 0$$

Három, egymásra meröleges egységvektor esetén, háromdimenziós térben

$$(\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{n}_j) \quad = \quad \delta_{ij} \qquad i,j\in(1,2,3) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}_1)+\mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}_2)+\mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}_3) \quad = \quad \mathbb{I}_3$$

Még át kell dolfgozni !!!

$$\mathcal{P}_{\|}(\boldsymbol{n}_i) = |n_i)(n_i| \qquad \mathcal{P}_{\perp}(\boldsymbol{n}_i) = \mathbb{I}_3 - |n_i)(n_i|$$

$$|a')(b'| = \mathcal{R}|a)(b|\mathcal{R}^T$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{a_ib_i}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \equiv \frac{(a|b)}{|a||b|}$$

5.5.2. A másodrendű tenzorok meghatározása

Legyen adott az alábbi két vektor ket formában:

$$\boldsymbol{a}\rightarrow|a| = (a_1,a_2,a_3) \qquad \boldsymbol{b}\rightarrow|b| = (b_1,b_2,b_3)$$

A vektorkomponensek, a koordináta rendszer forgatásakor fellépő transzformációi:

$$a'_i = \mathcal{R}_{ij}a_j \qquad b'_k = \mathcal{R}_{kl}b_l$$

Képezzük a vektorok komponenseiből az alábbi két komponensű mennyiségeket

$$C_{jl} \quad = \quad a_jb_l$$

melyek forgatáskor fellépő transzformációja

$$C'_{ik} = a'_ib'_k \quad = \quad \mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{kl}a_jb_l \quad = \quad \mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{kl}C_{jl}$$

Általában azt a kétindexü T_{ij} mennyiséget, amely forgatáskor az alábbi módon

$$\boxed{T'_{kl} = \mathcal{R}_{ki}\mathcal{R}_{lj}T_{ij}}$$

transzformálodik, másodrendü hármastenzornak nevezzük.

5.5.3. A másodrendű tenzorok tulajdonságai

Ha A_{ij} és B_{ij} két másodrendü hármastenzor akkor ezek lineáris kombinációja is szintén egy másodrendü hármastenzor

$$\alpha A_{ij} + \beta B_{ij} = C_{ij}$$

Jelölésükre felhasználjuk a vastag nagybetüt, a komponenseket pedig mátrix formában ábrázolhatjuk

$$\boldsymbol{T} \quad \to \quad (T_{ij}) \quad \to \quad \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

A másodrendü tenzor a következő invariancia tilajdonsággal rendelkezik:

$$Tr(\boldsymbol{T}') \equiv T'_{ii} = \mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{ik}T_{jk} = \delta_{jk}T_{jk} = T_{jj} \equiv Tr(\boldsymbol{T}) \to \boxed{T'_{ii} = T_{jj} = inv(\text{skalár})}$$

Két másodrendü tenzorbol nem csak lineáris kombináció segitségével képezhetünk egy ujabb másodrendü tenzort hanem azáltal is, hogy két indexet azonossá téve, az összegezési megállapodásnak megfelelöen, a közös indexre összegezünk az $\{1,2,3\}$ értékekre.

$$C'_{ik} = A'_{ij}B'_{jk} = \mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{jm}A_{lm}\mathcal{R}_{jn}\mathcal{R}_{kp}B_{np} = \mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{kp}\delta_{mn}A_{lm}B_{np} =$$

$$= \mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{kp}A_{lm}B_{mp} = \mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{kp}C_{lp}$$

A másodrendü tenzorok következő két tipussát különböztetjük meg:

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \text{szimmetrikus másodrendü tenzor}$$

hat független komponense van .

$$A_{ij} = -A_{ji} \Rightarrow \text{antiszimmetrikus másodrendü tenzor}$$

három független komponense van . Minden másodrendü tenzort, egyértelmüen felbonthatjuk szimmetrikus és anitszimmetrikus tenzorok összegeként

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}$$

5.5.4. Példák másodrendű tenzorokra

Vezessük be az u.n. nabla , lineáris differenciál vektoroperátort

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \quad ; \quad \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \quad ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \equiv \Delta$$

Megmutatjuk, hogy $\phi(\boldsymbol{x})$ skalár függvény esetén, $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$ vektor(-mező) komponenseiként transzformálodik. Mivel

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}'$$

ahol

$$x_j = \mathcal{R}_{ij}x'_i \quad \text{és} \quad \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \mathcal{R}_{ij}$$

következik, hogy

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial x'_i} = \mathcal{R}_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}}$$

A Kronechher szimbolum értelmezhető mint egy

$$\delta'_{ij} = \mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jl}\delta_{kl} = \mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jk} = \delta_{ij} = inv.$$

másodrendü invariáns tenzor. Legyen $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ egy vektormező (vektor-vektor függvény) és képezzük komponenseinek a koordináták szerinti parciális deriváltjait $\dfrac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$. Bizonyítsuk be, hogy másodrendű hármastenzorként viselkedik (transzformálódik).

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial \mathcal{R}_{ik}u_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

Képezzük velük a szimmetrikus $u_{ij} = u_{ji}$ és az antiszimmetrikus $a_{ij} = -a_{ji}$ tenzorokat az alábbi módon:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = u_{ji} \quad ; \quad a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -a_{ji}$$

Az antiszimmetrikus eleve irreduktibilis, a szimmetrikus tenzorbol pedig képezzük az U_{ij} irreduktibilis tenzort.

$$a_{ii} = 0 \qquad U_{ij} = u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij} \Rightarrow U_{ii} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = U_{ij} + a_{ij} + \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

5.6. Magasabbrendű háromdimenziós tenzorok

5.6.1. A háromdimenziós tenzorok általános meghatározása

$$T_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

$$T'_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \mathcal{R}_{i_1 j_1}\mathcal{R}_{i_2 j_2}\cdots\mathcal{R}_{i_n j_n}T_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$$

$N = 3^n$

5.6.2. A háromdimenziós tenzorok tulajdonságai

$$\alpha A_{i_1,i_2,\ldots,i_n} + \beta B_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = C_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_n}B_{i_{n=1},i_{n+2},\ldots,i_{n+m}} = C_{i_1,i_2,\ldots,i_n,i_{n+1},i_{n+2},\ldots,i_{n+m}}$$

$$[n] \otimes [m] \Rightarrow [n+m]$$

$$A_{i_1,i_2,\ldots i_{n-2},i_{n-1},i_n} \to A_{i_1,i_2,\ldots i_{n-2},i_{n-1},i_{n-1}} = B_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-2}} \to$$

$$\to B_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-4},i_{n-2},i_{n-2}} = C_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-4}} \to \cdots$$

$$[n] \to [n-2] \to [n-4] \to [n-6] \to \cdots$$

$$S_{i_1,\ldots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\cdots,i_{k-1},i_k,i_{k+1},\cdots,i_n} = S_{i_1,\ldots,i_{j-1},i_k,i_{j+1},\cdots,i_{k-1},i_j,i_{k+1},\cdots,i_n} \quad \forall \quad i_j, i_k \in (1,2,\ldots,n)$$

A különböző komponensek száma: $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\varepsilon'_{ijk} = \mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{jm}\mathcal{R}_{kn}\varepsilon_{lmn} = det(\mathcal{R})\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk} = inv.$$

5.6.3. A tenzorok alkalmazásai

elsősorban rugalmasságtanban

5.7. Ko- és kontravariáns tenzorok

Legyen $\boldsymbol{e}_i$ egy nem ortogonális, nem normált bázis a d dimenziós lineáris térben, melyben fennáll, hogy $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij}$ szimmetrikus tenzor.

Bármely vektor felírható $\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i$ alakban, ahol a^i a vektor *kontravariáns komponensei*. Azért kontravariáns (ellentétesen változó), mert ha a bázist nyújtanánk, akkor a komponensek csökkennének és fordítva.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = g_{ij} a^i b^j$$

Vezessük be az ún. *duális bázist* melynek vektorai legyenek $\boldsymbol{e}^j$ és meghatározás szerint:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j = \delta_i^j \ ,$$

ahol δ_j^i a jól ismert Kronecker-delta. A fenti meghatározás alapján a kontravariáns viselkedés nyilvánvaló (ha $\boldsymbol{e}_i$ nyúlik, akkor $\boldsymbol{e}^i$ zsugorodik). A transzformációs képlet a két bázis között:

$$\boldsymbol{e}^i = \alpha^{ik} \boldsymbol{e}_k \ ,$$

melyet megszorozva $\boldsymbol{e}_j$-val.

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \alpha^{ik} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_j = \alpha^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \ ,$$

Tehát α mint mátrix a g mátrix inverze ezért jelöljük ugyancsak g-vel, de felső indexekkel:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \ , \qquad \boldsymbol{e}^i = g^{ik} \boldsymbol{e}_k$$

Ugyanakkor

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j = g^{ik} g^{jl} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l = g^{ik} g^{jl} g_{kl} = g^{ik} g_{kl} g^{lj} \to (\boldsymbol{g}^{-1} \boldsymbol{g} \boldsymbol{g}^{-1}) = \boldsymbol{g}^{-1} \ ,$$

ahol kihasználtuk a g^{jl} szimmetriáját. Tehát

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j = g^{ij}$$

Ennek alapján foglaljuk össze:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij} \ , \quad \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j = g^{ij} \ , \quad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j = \delta_i^j \ , \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

$$\boldsymbol{e}^j = g^{jk} \boldsymbol{e}_k = \delta_k^j \boldsymbol{e}^k \ , \quad \boldsymbol{e}_i = g_{il} \boldsymbol{e}^l = \delta_i^l \boldsymbol{e}_l \ .$$

Azt is beláthatjuk, hogy egy tetszőleges $\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i = a_j \boldsymbol{e}^j$ vektorra.

$$a_i = \delta_i^k a_k \ , \qquad a^i = g^{ik} a_k \ , \quad a_j = g_{jl} a^l \ .$$

Tehát

- a g_{ik} és g_{jl} metrikus tenzorokkal biztosítható formálisan az „átjárás" a ko- és kontravariáns reprezentációk között.

- az Einstein-féle összegzési konvenció mindig egy alsó és egy felső index esetén alkalmazandó.

Megjegyzés:

- Ortonormált bázis esetén $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^{-1}$.
- Ha fenti egyenlőség fennáll, akkor az eredeti és a duális bázis egybeesnek és a kétféle index (alsó és felső) használata indokolatlan.

Ko- és kontravariáns tenzorok: Legyen $\boldsymbol{T}$ másodrendű tenzor.
Reprezentációja a $\boldsymbol{e}_i$ bázisban:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \equiv t_{ij} \ .$$

Reprezentációja a $\boldsymbol{e}^i$ duális bázisban:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^j) = \boldsymbol{T}(g^{im}\boldsymbol{e}_m, g^{jn}\boldsymbol{e}_n) = g^{im}g^{jn}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_n) = g^{im}g^{jn}t_{mn} \equiv t^{ij} \ .$$

$$\begin{aligned}
t^{ij} &= g^{im}g^{jn}t_{mn} \\
t_{ij} &= g_{im}g_{jn}t^{mn} \\
t_{ij} &= \delta_i^m \delta_j^n t_{mn} \\
t_i^j &= g_{im}g^{jn}t_n^m \\
&\vdots
\end{aligned}$$

MEGJ:a,b,c, a' = bxc/(a,b,c) ... keresni. feladat keresni az elozo feladat (ahol geometriailag adtuk eg) dualis bazisat (szerkeszd meg geometriailag. hat meg a metrikus tenzor.)

5.7. Példa. *Háromdimenziós térben* $\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{e}^1 = \alpha(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)$.
Ugyanakkor $\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \alpha(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$

$$\boldsymbol{e}^1 = \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \ , \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \ , \quad \boldsymbol{e}^3 = \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \ .$$

$$\boldsymbol{e}^i = \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \frac{\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}$$

Négy dimenziós térben:

$$\boldsymbol{e}^i = \frac{\varepsilon_{ijkl}}{3!} \frac{\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_l}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)}$$

5.7.1. A kétdimenziós eukleideszi tér

Emlékezzünk vissza, hogy a valós számokból rendezett párokat alkothatunk a descartes-i szorzat által.

5.8. Definíció. *Legyen* X_1, X_2 *két halmaz. A két halmaz Descartes szorzata egy újabb halmaz*

$X_1 \times X_2$, amelynek elemei rendezett számpárok:

$$X_1 \times X_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

Következésképpen, amennyiben $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, azt kapjuk, hogy $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Tehát $\mathbb{R}^2$ elemei rendezett számpárok. A valós számokon értelmezve van az összeadás és a szorzás. Felmerül a kérdés, hogy $\mathbb{R}^2$ is kap-e valamit ebből a struktúrából. Próbáljuk meg úgy definiálni az összeadást és szorzást $\mathbb{R}^2$-en, hogy használjuk fel a valós számokról a műveleteket. Mivel számpárokról beszélünk, ahol mindkét szám valós, az összeadást definiáljuk tagonként. Konkrétan:

5.9. Definíció. *Legyen $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor (x_1, y_1) és (x_2, y_2) összege a következő számpár:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

5.10. Példa. *Legyen a két számpáros $(1,5), (3,3)$. Ekkor az összegük:*

$$(1,5) + (3,3) = (1+3, 5+3) = (4,8).$$

Észrevehetjük azt is, hogy:

$$(3,3) + (1,5) = (3+1, 3+5) = (4,8).$$

Mint látjuk, érdekesség képpen ugyanazt az eredményt kapjuk, attól függetlenül, hogy milyen sorrendben adtuk össze a két számot. Véletlenszerű-e ez? Vagy talán van egy struktúra, amely ezt mindig biztosítja?

5.11. Megjegyzés. *Az összeadás művelete $\mathbb{R}^2$-en kommutatív. Ez abból következik, hogy a valós számok összeadása kommutatív, vagyis felcserélhető. A kijelentést egyszerű belátni: legyen $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor:*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + FELADAT y_2);$$

$$(y_1, y_2) + (x_1, x_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2).$$

De mivel x_1, y_1 valós számok, az összegük felcserélhető, vagyis:

$$x_1 + y_1 = y_1 + x_1.$$

Hasonlóan: x_2, y_2 valós számok, emiatt:

$$x_2 + y_2 = y_2 + x_2.$$

Következésképpen:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)=(y_1+x_1,y_2+x_2)=(y_1,y_2)+(x_1,x_2).$$

Az összeadáshoz hasonlóan, egy szorzás műveletet is értelmezünk, tagonként. Ezt a műveletet skalárral való szórzásnak nevezzük.

5.12. Definíció. *Legyen $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ egy számpár és $\lambda\in\mathbb{R}$ egy valós szám. Ekkor (x_1,x_2)-nek a λ skalárral való szorzása a következő számpár:*

$$(\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2).$$

Tehát eddig van egy halmazunk, amelyen két művelet értelmezett. Ezek a műveletek eleget tesznek a vektortér axiómáknak. Emiatt a $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ struktúra egy vektorteret alkot. Ennek a struktúrának az elemeit két dimenziós eukleideszi vektoroknak nevezzük. Mostantól egy két dimenziós eukleideszi vektort a következő képpen fogunk jelölni:

$$\mathbf{x}:=(x_1,x_2).$$

Tegyük be a vektortér axiómak geometriai jelentését/ábrázolását. Ezáltal vezessük be. Vegyük észre, hogy felírhatjuk a következőt:

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2)=(x_1,0)+(0,x_2)=x_1\cdot(1,0)+x_2\cdot(0,1).$$

5.13. Definíció. *Legyen $c,d\in\mathbb{R}$ valós szám és $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$ két dimenziós eukleideszi vektor. Ekkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineáris kombinációjának nevezzük a következő két dimenziós eukleideszi vektort:*

$$(cx_1+dy_1,cx_2+dy_2)=c(x_1,x_2)+d(y_1,y_2)=c\mathbf{x}+d\mathbf{y}.$$

5.14. Példa. *A lineáris kombinációnak sok sajátos esete van, amelyet jól ismerünk:*

1. $1\cdot\mathbf{x}+1\cdot\mathbf{y}$- *összeadás;*

2. $1\cdot\mathbf{x}-1\cdot\mathbf{y}$- *kivonás;*

3. $0\cdot\mathbf{x}+0\cdot\mathbf{y}=\mathbf{0}$- *null vektor;*

4. $c\cdot\mathbf{x}+0\cdot\mathbf{y}=c\cdot\mathbf{x}$- *skálázás*

Úgy a lineáris kombináció, mint a fenti négy sajátos esete is ábrázolható geometriailag. Ábra: Gilbert Strang MIT kurzusából tehetnénk ábrákat ide.

Következő munka: bevezetni bázist, vektor koordináta reprezentációját, transzformációk. Mátrix és lineáris függvény közötti különbség.

5.8. Absztrakt vektorterek

Az előző fejezetben az eukleideszi térben való vektorok tulajdonságai tanulmányozása után, észrevettük, hogy adott műveletekre nézve specifikus tulajdonságokat teljesítenek. Ebben a fejezetben a célunk a vektortér általános fogalmának bevezetése, illetve a vektortér struktúrát megőrző leképezések tanulmányozása. Az absztrakt vektorok, vektorterek fizikában több helyen is megjelennek:

1. klasszikus mechanikában: helyzetvektor, sebesség, gyorsulás;
2. Fourier analízisben: $L^2(0,2\pi)$ - differenciálegyenletek előadáson tanultuk, hogy $\sin(mx)$ és $\cos(mx)$ egy bázist alkotnak ezen a téren;
3. elektromágnességben: a Maxwell egyenletek időben változó vektormezőket írnak le: $\boldsymbol{E}(t),\boldsymbol{B}(t)$ - pontosabban, a tér minden pontjában egy adott időpillanatban két vektor van megadva, amely leírja az elektromos és mágneses mezőt;
4. kvantummechanikában: $L^2(R^3,dx)$- avagy a négyzetesen integrálható függvények tere - ezek a hullámfüggvények;
5. általános relativitáselmélet: téridőhöz kötött érintőterek.

Mint láthatjuk, vektorterek használva vannak úgy a klasszikus fizikában, mint a kvantummechanikában is, tehát a természetet leíró matematikában lényeges szerepet játszanak.

5.15. Megjegyzés. *Az általános relativitáselméletben a téridőnek nincs lineáris struktúrája. Ez könnyen belátható abból, hogy nem tudunk skalárral való szorzást és összeadást definiálni a téridőn. A következő kérdések ezt egyértelműen illusztrálják:*

1. *"Merre van $5\times$ Párizs?";*
2. *"Merre van Párizs + Kolozsvár?".*

Mint láthatjuk, a fenti kérdéseknek nincs sok fizikai értelme, emiatt a relativisztikus téridőre nem húzhatunk lineáris struktúrát.

5.8.1. Vektorterek

Amielőtt vektortereket definálnánk, két matematikai struktúrára van szükségünk: csoport, test. A csoportok fontos szerepet játszanak a fizikában, mivel rendszerek szimmetriáihoz köthetők. Továbbá, amennyiben egy Lagrange-függvény invariáns, nem változik egy folytonos szimmetriacsoport hatására nézve, a szimmetriacsoporthoz tartozik egy megmaradó fizikai mennyiség. Az energia, implzus megmaradásának a tétele modern nyelvezetben az időbeli és térbeli való transzlációs szimmetria következménye, míg az impulzusnyomaték megmaradásának elve a forgásinvarianciához köthető. Ugyanakkor nem csak téridő szimmetriák vannak, hanem belső mértékszimmetriák is, amelyekhez hasonló módon tartoznak megmaradó mennyiségek, mint például az izospin. Mottóként kijelenthetjük: "A számok mennyiségeket mérnek, a csoportok szimmetriákat".

5.16. Definíció. *Legyen G egy nemüres halmaz és · egy függvény, amely a halmaz két elemét egy másik elemébe képezi (***zártság***):*

$$\cdot : G \times G \to G \ ,$$
$$(a,b) \to a \cdot b \ .$$

ol $a,b \in G$. A $(G,\cdot)$ párost **csoportnak** *nevezzük, ha a következő axiómák teljesülnek:*

1. **Bal identikus elem létezése**: $\exists\ e \in G\, \forall\ g \in G:$

   $$e \cdot g = g \ ,$$

   ahol e-t a csoport **bal identikus elemének** *nevezzük;*

2. **Bal inverz létezése**: $\forall\ g \in G$, $\exists a' \in G$:

   $$a' \cdot g = e \ ;$$

   ahol a'-t g **bal inverzének** *nevezzük;*

3. **Asszociativitás**: $\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G$:

   $$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \ .$$

Amennyiben minden $a,b \in G$-re teljesül, hogy $a \cdot b = b \cdot a$, a $(G,\cdot)$ csoportot Abel vagy kommutatív. csoportnak nevezzük.

Ide be lehetne tenni feladatokat: pl. Igazoljuk, hogy:

1. az inverz inverze az önmaga, vagyis $(g^{-1})^{-1} = g$.
2. Ha létezik bal inverz és bal egység elem, akkor létezik jobb inverz és jobb egység elem is, s egyenlőek a bal oldaliakkal.
3. Egy csoport identikus eleme, inverz elem egyértelmű.
4. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

5.17. Megjegyzés. *A fenti struktúrát általában diszkrét csoportnak nevezzük. Léteznek Lie-csoportok is, amelyeket formálisan sokaságként definálunk az algebrai struktúra mellett, ahol a csoportban levő műveletek végtelenül sokszor differenciálhatók. Ebben az előadásban, gondolhatunk a folytonos/Lie csoportokra, mint olyan csoportokra, amelyeket paraméterezni lehet folytonos, vagy végtelenül differenciálható módon.*

5.18. Példa. *A valós számok az összeadásra nézve csoportot alkotnak, sőt Abel-csoportot. Viszont a szorzásra nézve nem, mivel nullának nincs inverze.*

5.19. Példa. Általános lineáris csoport(*General linear group*): $GL(n,\mathbb{C})$- *az* $n\times n$*-es invertálható mátrixok halmaza a mátrix szorzásra nézve. Ez a csoport nem kommutatív* $n=2$ *esetén. Egyszerűen belátható, mivel:* $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ *és* $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *invertálható mátrixok, determinánsuk* $-1\neq 0$*. Viszont nem kommutálnak, ami egyszerűen belátható:*

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ez a példa kivételesen érdekes, mivel az ortogonális és unitér csoportok, amelyeket fizikában sokszor használunk részcsoportjai $GL(n,\mathbb{C})-nek$.

5.20. Példa. Ortogonális csoport $O(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{R})|A^{\mathsf{T}}A=AA^{\mathsf{T}}=\mathbb{I}_n\}$. *Egyértelműen beláthatjuk:*

$$\det(A^TA)=\det(\mathbb{I}_n)\implies\det(A^TA)=\det(A^T)\det(A)=\det(A)^2=1\implies\det(A)=\pm1.$$

Az alcsoportot, ahol $\det(A)=1$ **speciális ortogonális csoport**-nak nevezzük:

$$SO(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{R})|A^{\mathsf{T}}A=AA^{\mathsf{T}}=\mathbb{I}_n,\det(A)=1\}.$$

Ez ugyan nem más, mint a jól ismert forgás csoport! A konkrét kapcsolatot és a csoport paraméterezését a következő tétel adja.

5.21. Tétel. $SO(2)=\left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{R})\middle|\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

Bizonyítás. Kezdjük $SO(2)$ definíciójával:

$$SO(2)=\{A\in GL(2,\mathbb{R})|A^{\mathsf{T}}A=\mathbb{I}_2,\det(A)=1\}.$$

Vegyünk egy konkrét mátrixot $GL(2,\{R\})$-ből és alkalmazzuk rá a feltételeket:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\implies A^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\implies A^{\mathsf{T}}A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+cd\\ ba+dc & b^2+d^2\end{pmatrix}.$$

Mivel$a,b,c,d\in\mathbb{R}$, felhasználva a kommutativitást $ab+cd=ba+dc$ kapjuk, hogy:

$$A^{\mathsf{T}}A=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+cd\\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}.$$

Most számoljuk ki $\det(A)$-t:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

A két feltételt $A^{\intercal}A = \mathbb{I}_2, \det(A) = 1$ felhasználva:

$$\det(A) = 1 \implies ad - bc = 1, \ A^{\intercal}A = \mathbb{I}_2 \implies \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát négy feltételt kaptunk az a, b, c, d valós számokra:

$$a^2 + c^2 = 1; \tag{16}$$

$$b^2 + d^2 = 1; \tag{17}$$

$$ad - bc = 1; \tag{18}$$

$$ab + cd = 0. \tag{19}$$

A (16), (17) egyenletek azt mutatják, hogy $(a,c),(b,d)$ egy egység sugarú körön vannak, tehát parametrizálhatjuk őket a következő képpen:

$$a = \cos\alpha, \quad c = \sin\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad d = \sin\beta, \text{ ahol } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Bepakolva (18),(19)-be:

$$\cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\cos\alpha = 1, \quad \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0. \tag{20}$$

Felhasználva a trigonometrikus összefüggéseket (20)-t átírhatjuk, mint:

$$\sin(\beta - \alpha) = 1, \quad \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Ebből egyértelműen következik, hogy:$\beta - \alpha \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Tehát:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} + \alpha\right) \\ \sin\alpha & \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} + \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mivel $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, átnevezhetjük $\alpha \to \alpha' = -\alpha$. A cos függvény páros, míg sin függvény páratlan, amiből következik:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha') & -\sin(-\alpha') \\ \sin(-\alpha') & \cos(-\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -(-)\sin\alpha' \\ -\sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & \sin\alpha' \\ -\sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix}, \ \alpha' \in \mathbb{R}.$$

□

5.22. Megjegyzés. *Ahogy említettük feljebb is, a forgáscsoporttal szemben való invariancia egy megmaradási tételhez vezet: impulzusnyomaték megmaradása.*

Amennyiben belefér, nem túl sok, betehetném még példának az unitér csoportokat, és SU(2)-re hasonlóan a paraméterezést (vagy ez lehet akár feladat is). SU(2) után meg lehetne említeni, hogy SU(2) SU(3) és U(1) a standard modell mértékcsoportjai, és hozzájuk tartozó megmaradó mennyiségek vannak, ez lenne a motiváció ennek a tanulmányozására.

5.23. Definíció. *Egy $(F,+,\cdot)$ hármast testnek nevezünk, ahol F egy halmaz, $+,\cdot : F \times F \to F$ leképezések és kielégítik az alábbi axiómákat:*

1. $(F,+)$ *Abel-csoport;*
2. $(F \setminus \{0\},\cdot)$ *Abel-csoport;*
3. $\forall a,b,c \in F : a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

5.24. Példa. *A legegyszerűbb példa a $\{0,1\}$ halmaz, összeadásra és szorzásra nézve. Ezt $\mathbb{Z}_2$-nek nevezzük.*

5.25. Példa. $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

5.26. Példa. $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Ebben a jegyzetben legtöbbször csak a valós számokat fogjuk testként venni, de megemlítettük a test fogalmát, mivel például a kvantummechanikában a komplex test fölötti vektortereket használunk, így érdemes tetszőleges test feletti vektorterekről tudni. Tehát mostantól, legtöbb esetben $F = \mathbb{R}$.